

GUMISZERŰ ANYAGOK HIPER-VISZKOELASZTIKUS ANYAGMODELL PARAMÉTEREINEK MEGHATÁROZÁSA

PARAMETER IDENTIFICATION OF HYPER-VISCOELASTIC MODEL FOR RUBBER-LIKE MATERIALS

Fazekas Bálint, doktorandusz, fazekas.balint@gt3.bme.hu
Goda Tibor, egyetemi docens, goda.tibor@gt3.bme.hu

A simple numerical algorithm has been presented for the identification of hyper-viscoelastic material model parameters in case of incompressible material behavior. The stress response of the material model has been obtained by numerical integration of the finite strain viscoelastic model implemented in the FE software Abaqus. The proposed technique provides a general strategy for parameter identification. Here, the algorithm is applied for isoprene rubber characterized by stress relaxation tests.

1. BEVEZETÉS

Az elasztomereket az iparban széles körben alkalmazzák, köszönhetően a kedvező mechanikai tulajdonságaiknak és a nagy energiaelnyelő képességüknek. A gumik nagy alakváltozásokra képesek, a feszültség-alakváltozás közötti kapcsolat erős nemlinearitást mutat, továbbá időfüggő anyagi viselkedéssel is rendelkeznek. Ahhoz, hogy a komplex mechanikai viselkedésüket modellezni tudjuk, pontos anyagmodellekre van szükség [1].

A gumi anyagi viselkedését az ún. hiper-viszkoelasztikus anyagmodellel írhatjuk le, amely egy hiperelasztikus és egy viszkoelasztikus modell összekapcsolásán alapszik. Előbbi az anyag időfüggetlen, utóbbi az időfüggő viselkedést jellemzi [2]. A modell széles körben elterjedt, azonban a modellparaméterek pontos meghatározása nem triviális. A mérnöki gyakorlatban a legelterjedtebb módszer a szeparált illesztés, ahol a hiperelasztikus és a viszkoelasztikus paraméterek külön-külön illeszthetők a mérési eredményekre, ami azonban pontatlan eredményekhez vezethet [3].

A vizsgálataink során elvégeztük az Abaqus [4] végeelem szoftverbe implementált hiper-viszkoelasztikus anyagmodell konstitutív

egyenletének numerikus integrálását, amely során megkaptuk a modellre vonatkozó növekményes feszültségválaszt. Ennek előnye, hogy a modellparamétereket egy lépésben, közvetlenül lehet illeszteni a mérési eredményekre, amely jelentősen pontosítja a kapott anyagparamétereket [5].

2. AZ ALKALMAZOTT ANYAGMODELL

2.1. Hiperelasztikus modell

A gumiszerű anyagok időfüggetlen viselkedése hiperelasztikus anyagmodellekkel írható le, amelyek az alakváltozási energiasűrűség függvényével (W) definiálhatók. Feltételezzük, hogy az anyag izotróp, ekkor W felírható a Green-féle deformációs tenzor skalár invariánsaival (I_1, I_2, I_3). További feltételezés, hogy a gumi összenyomhatatlan, vagyis $J = \det \mathbf{F} = 1$. A modellalkotás során a 3 paraméteres Mooney-Rivlin-féle hiperelasztikus anyagmodellt [6] alkalmaztuk, amelynek az alakváltozási energiasűrűség függvénye a következő:

$$W(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3), \quad (1)$$

ahol C_{10}, C_{11}, C_{01} anyagparaméterek. A mérnöki főfeszültség az alábbi képlet szerint számolható:

$$P_k = \frac{\partial W}{\partial \lambda_k}, \quad (2)$$

ahol λ_k a k -adik főnyúlás ($k=1, 2, 3$).

Az egytengelyű húzás esetén az alakváltozási gradiens – kihasználva a térfogati állandóságot – az alábbi alakban írható fel:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

ahol λ a terhelés irányába eső főnyúlás. Az alakváltozási energiasűrűség függvény (W) ismeretében a (2) egyenlet segítségével meghatározható a mérnöki feszültségválasz. Az egytengelyű feszültségi állapot miatt az egyetlen nemzérus feszültségkomponens P_1 , míg $P_2 = P_3 = 0$.

$$P_1 = 2(\lambda^3 - 1) \left[\lambda(C_{01} + C_{10}\lambda) + 3C_{11}(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \right] / \lambda^4. \quad (4)$$

2.2. Viszkoelasztikus modell

Ebben a fejezetben az Abaqus [4] által használt kifejezésekkel dolgozunk. Az anyag időfüggő viselkedése az ún. hiper-viszkoelasztikus anyagmodelllel írható le. Mivel az anyag nagy alakváltozásokra képes, ezért a kis alakváltozásokra érvényes viszkoelasztikus modell helyett a véges alakváltozásokra érvényes modell használható. Az összenyomhatatlan anyagokra érvényes pillanatnyi feszültségválasz a Kirchhoff-féle feszültségtenzorral adható meg:

$$\boldsymbol{\tau}_0(t) = \boldsymbol{\tau}_0^D(\mathbf{F}(t)) + \boldsymbol{\tau}_0^H(t), \quad (5)$$

ahol $\boldsymbol{\tau}_0^D$ a deviátoros, $\boldsymbol{\tau}_0^H$ a hidrosztatikus része a pillanatnyi Kirchhoff-féle feszültségi tenzornak. A nagy alakváltozáshoz tartozó hiper-viszkoelasztikus anyagmodell konstitutív egyenlete az alábbi alakban írható fel:

$$\boldsymbol{\tau}^D(t) = \boldsymbol{\tau}_0^D(t) - \text{dev} \left[\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^t \mathbf{F}_i^{-1}(t-s) \boldsymbol{\tau}_0^D(t-s) \mathbf{F}_i^{-T}(t-s) e^{-s/\tau_i} ds \right],$$

$$\boldsymbol{\tau}^H(t) = \boldsymbol{\tau}_0^H(t), \quad (6)$$

ahol N a viszkoelasztikus modell rendje, $\mathbf{F}_i(t-s)$ tulajdonképpen egy relatív alakváltozási gradiens $t-s$ és t időpillanatok között, τ_i az i -edik relaxációs idő, míg g_i az i -edik relatív csúsztatórugalmassági modulusz. A kis alakváltozásokra érvényes viszkoelasztikus modellhez hasonlóan, a viszkoelasztikus viselkedés a Prony sorozattal írható le az alábbi formában:

$$g_R(t) = 1 - \sum_{i=1}^N g_i (1 - e^{-t/\tau_i}), \quad (7)$$

ahol a dimenziótlan relaxációs modulusz-függvény az alábbi módon van definiálva:

$$g_R(t) = G(t) / G_0, \quad (8)$$

ahol $G(t)$ az időfüggő, míg G_0 a pillanatnyi (üveges) nyíró modulusz.

Egytengelyű húzás esetén a relatív alakváltozási gradiens a (3) egyenlethez hasonló módon írható fel:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1/2} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

ahol

$$A = \frac{\lambda(t-s)}{\lambda(t)}. \quad (10)$$

Fontos megjegyezni, hogy a paraméterillesztés során a rendelkezésre álló mérési eredményekre illesztjük a modellt, ezért a Kirchhoff-féle feszültséget át kell számítani mérnöki feszültségre. Egytengelyű húzás esetén, térfogati állandóság mellett a nemzérus feszültségek között a kapcsolat:

$$P_1 = \tau_1 / \lambda. \quad (11)$$

A (6) számú egyenletekben szereplő műveleteket elvégezve tehát meghatározható a hiper-viszkoelasztikus anyagmodell mérnöki feszültségválasza, amely egytengelyű húzásra vonatkozóan az alábbi alakban írható fel:

$$P(t) = P_1(t) + G_1(t) + G_2(t), \quad (12)$$

ahol

$$G_1(t) = -\frac{2}{3} \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^t \frac{\lambda(t)}{\lambda(t-s)} P_1(t-s) e^{-s/\tau_i} ds,$$

$$G_2(t) = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^t \left(\frac{\lambda(t-s)}{\lambda(t)} \right)^2 P_1(t-s) e^{-s/\tau_i} ds, \quad (13)$$

továbbá $P_1(t)$ a pillanatnyi feszültségválasz. Megjegyzendő, hogy $\lambda(t)$ a relaxációs mérés során ismert, azt, mint bemenő adatot kezeljük.

3. AZ ILLESZTÉS ÁTTEKINTÉSE

Az időfüggő viselkedést mutató anyagok vizsgálatának egyik gyakori módszere a feszültség-relaxációs mérés, ahol az alakváltozást állandó értéken tartva detektáljuk az anyag feszültségválaszát. A mérésekből kapott relaxációs görbe (feszültség-idő diagram) két részre osztható. Az első szakasz a terhelési, a második pedig a relaxációs szakasz. A szeparált illesztési módszer esetén feltételezzük, hogy az első szakasz megfeleltethető az anyag végtelen gyors terhelésre adott válaszával, vagyis a hiperelasztikus modell paramétereit ezen görbe alapján opti-

málják, míg a második szakasz segítségével a viszkoelasztikus modellhez tartozó Prony paramétereket azonosítják. Ez az illesztési módszer azonban pontatlansághoz vezet, amelyről részletek a [7] cikkben találhatóak.

A paraméterillesztés pontossága javítható, ha az illesztést egy lépésben, a mérési eredményre közvetlenül végezzük el. Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk tenni, szükséges a hiper-viszkoelasztikus anyagmodell növekményes feszültségválaszát előállítani, amelyet a következő alfejezetben mutatunk be.

3.1. A növekményes feszültségválasz előállítása

A 2. fejezetben előállítottuk a hiper-viszkoelasztikus anyagmodell egytengelyű húzásra vonatkozó feszültségválaszát ((12) egyenlet). A cél a konvolúciós integrálokat tartalmazó kifejezések növekményes megoldásának előállítása. Ehhez feltételezzük, hogy a megoldás ismert a t időpillanatban és szükséges előállítani a $t+\Delta t$ időpillanatban. Vagyis a (13) számú egyenletek az alábbi alakra írhatók át:

$$G_1 = -\frac{2}{3} \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \int_{-\Delta t}^t e^{-(t+\Delta t)/\tau_i} P_0(t-\bar{t}) \frac{\lambda(t+\Delta t)}{\lambda(t-\bar{t})} d\bar{t}, \quad (14)$$

$$G_2 = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \int_{-\Delta t}^t e^{-(t+\Delta t)/\tau_i} P_0(t-\bar{t}) \left(\frac{\lambda(t-\bar{t})}{\lambda(t+\Delta t)} \right)^2 d\bar{t},$$

ahol $\bar{t} = s - \Delta t$.

A (14) számú egyenlet átalakítása után elvégezhető az integrálás analitikusan, így eredményül egy rekurzív formula adódik, vagyis megkapjuk a feszültségválaszt a $t+\Delta t$ időpillanatban. A számításhoz szükséges részletek megtalálhatóak az Abaqus [4] dokumentációjában. A levezetést mellőzve végeredményül az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$G_1(t+\Delta t) = -2/3 \sum_{i=1}^N g_i \left[P_0(t) \beta_i \frac{\lambda(t+\Delta t)}{\lambda(t)} + \alpha_i P_0(t+\Delta t) \right] + \frac{\lambda(t+\Delta t)}{\lambda(t)} G_1(t) \gamma_i,$$

$$G_2(t+\Delta t) = -1/3 \sum_{i=1}^N g_i \left[P_0(t) \beta_i \left(\frac{\lambda(t)}{\lambda(t+\Delta t)} \right)^2 + \alpha_i P_0(t+\Delta t) \right] + \left(\frac{\lambda(t)}{\lambda(t+\Delta t)} \right)^2 G_2(t) \gamma_i, \quad (15)$$

ahol

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \exp[-\Delta t / \tau_i], \\ \alpha_i &= 1 - \tau_i / \Delta t (1 - \gamma_i), \\ \beta_i &= \tau_i / \Delta t (1 - \gamma_i) - \gamma_i. \end{aligned} \quad (16)$$

Vagyis a hiper-viszkoelasztikus anyagmodell feszültségválasza az időlépést követően:

$$P(t+\Delta t) = P_1(t+\Delta t) + G_1(t+\Delta t) + G_2(t+\Delta t), \quad (17)$$

ahol Δt az időlépés, P_1 a hiperelasztikus anyagmodellrel definiált pillanatnyi mérnöki feszültségválasz ((4) egyenlet). Mivel a kezdeti feszültségi állapot általában ismert ($P=\varepsilon=0$, ha $t=0$), továbbá a nyúlás-idő értékek a mérésből adottak, ezért a feszültségválasz $t>0$ esetén meghatározható.

3.2. Anyagparaméterek meghatározása

A meghatározandó anyagparaméterek száma $m+2N$, ahol $m(C_{ij})$ a hiperelasztikus modellben szereplő anyagállandók száma, míg $N(g_i, \tau_i)$ a viszkoelasztikus modell rendje. A (17) egyenletbe behelyettesítve az összes tagot, megkapjuk a hiper-viszkoelasztikus anyagmodell növekményes mérnöki feszültségválaszát. Az anyagparaméterek meghatározásához bevezetjük az alábbi hibaértéket:

$$\zeta = \sum_{j=1}^K |P_j^{\text{exp}} - P_j^{\text{calc}}|, \quad (18)$$

ahol K a mintavételi szám, P_j^{exp} és P_j^{calc} a mért és a számított mérnöki feszültségértékek az adott mintavételi pontban. A cél a bevezetett hibaérték minimalizálása, amely feladat megoldható a MS Excel beépített minimumkereső algoritmusával. Megjegyzendő, hogy a nulladik lépésben kezdeti paramétereket kell felvenni. Továbbá fontos, hogy a Prony paramétereknek az alábbi peremfeltételeket teljesíteni kell:

$$\sum_{i=1}^N g_i < 1, \quad g_i > 0, \quad \tau_i > 0, \quad (19)$$

illetve a hiperelasztikus anyagparamétereknek a Drucker-féle stabilitási feltételnek kell eleget tenniük.

4. EREDMÉNYEK BEMUTATÁSA

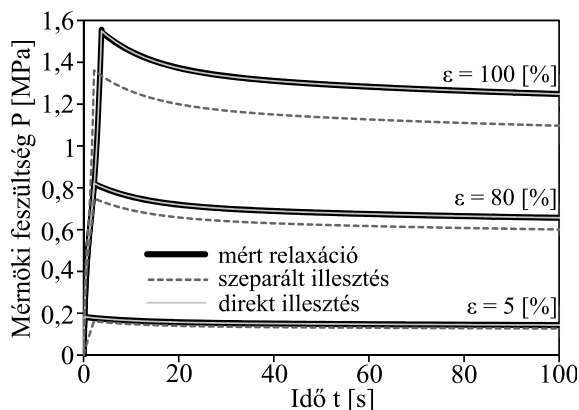
Annak érdekében, hogy bemutassuk a direkt paraméterillesztő módszer hatékonyságát, Bódai, Goda [8] izoprén gumira vonatkozó munkáját vettük alapul. A mérés részletei a [8] cikkben található. Az anyag időfüggetlen viselkedését a 2. fejezetben bemutatott három paraméteres Mooney–Rivlin-féle hiperelasztikus modellrel ($m=3$), míg az időfüggő viselkedést másodrendű ($N=2$) viszkoelasztikus modellrel

vettük figyelembe. A mérési eredmények alapján elvégeztük a szeparált paraméterillesztést, továbbá az egy lépéses illesztést a bemutatott numerikus módszerrel, felhasználva a (17) egyenletet. A két különböző módszerrel kapott paramétereket az 1. táblázat tartalmazza.

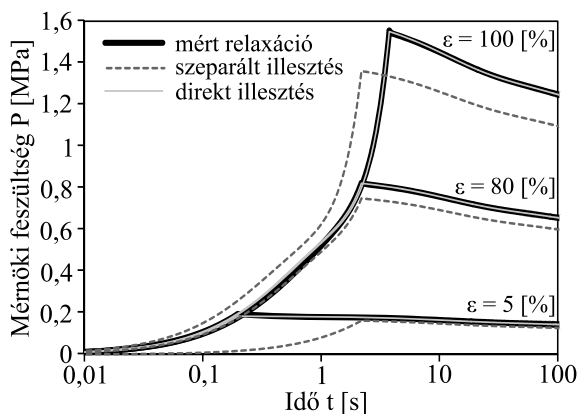
1. táblázat. A különböző illesztési módszerekkel kapott anyagparaméterek.

Paraméterek	Illesztési módszer	
	Szeparált	Direkt
C_{10} [MPa]	-0,940	-1,166
C_{01} [MPa]	1,582	1,894
C_{11} [MPa]	0,244	0,300
g_1 [-]	0,138	0,141
τ_1 [s]	10,55	9,98
g_2 [-]	0,101	0,115
τ_2 [s]	98,14	92,03

Felhasználva az 1. táblázatban szereplő paramétereket, elvégeztük az egytengelyű relaxációs teszt végelem szimulációját az Abaqus végelem szoftverben. A két módszerrel kapott mérnöki feszültségválaszt összevetve a különböző alakváltozási szintekhez tartozó feszültség-relaxációs mérési eredményekkel az 1. ábra, illetve logaritmikus skálán a 2. ábra mutatja.



1. ábra. Az illesztési módszerek összevetése.



2. ábra. Az illesztési módszerek összevetése log skálán.

Az 1. és a 2. ábrákon látható, hogy a direkt illesztési módszerrel kapott paraméterek nagy pontossággal visszaadják a mérési eredményeket, míg a szeparált illesztéssel kapott görbék pontatlan eredményekhez vezetnek, különösen a nagyobb alakváltozási szintek mellett. Elmondható, hogy a direkt paraméterillesztési módszer szignifikánsan javítja a paraméterek pontosságát.

4. KONKLÚZIÓ

Elvégeztük a hiper-viszkoelasztikus anyagmodell konstitutív egyenleteinek numerikus integrálását, így megkaptuk az anyagmodell növekményes feszültségválaszt. Ennek ismeretében az anyagmodell paraméterei nagy pontossággal illeszthetők a feszültség-relaxációs mérési eredményekre. Az általunk javasolt algoritmus előnye, hogy (A) gyorsabb és (B) a mérési eredményekkel jobban egyező megoldást ad, mint a mérnöki gyakorlatban gyakran alkalmazott szeparált illesztési módszer, így hozzájárul az időfüggő viselkedést mutató anyagok nagy pontosságú modellezéséhez.

5. IRODALOM

- [1] J. Bergström: Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling, Elsevier, 2015.
- [2] H. F. Brinson, L.C. Brinson: Polymer Engineering Science and Viscoelasticity. Springer, 2015.
- [3] S. Lee, W. G. Knauss: A note on the determination of relaxation and creep data from ramp tests. Mechanics of Time-Dependent Materials, (4):1–7, 2000.
- [4] Abaqus 6.14. Documentation
- [5] S. M. Goh: Determination of the constitutive constants of non-linear viscoelastic materials. Mechanics of Time-Dependent Materials, 8:255–268, 2004.
- [6] M. Mooney: A theory of large elastic deformation. Journal of Applied Physics, 11(9), 582–592, 1940.
- [7] A. Kossa, S. Berezvai: Visco-hyperelastic Characterization of Polymeric Foam Materials. Materials Today, (3), 1003–1008, 2006.
- [8] G. Bódai, T. Goda: A new, tensile test-based parameter identification method for large-strain generalized maxwell-model. Acta Polytechnica Hungarica. 8, 89–108. 2011.