

ANIZOTRÓP ANYAGÚ PRIZMATIKUS RUDAK SAINT-VENANT CSAVARÁSI FELADATA

THE SAINT-VENANT TORSION OF ANISOTROPIC PRISMATIC BARS

Ecsedi István, egyetemi tanár, dr. habil, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék
Baksa Attila, egyetemi docens, PhD, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék

ÖSSZEFOGLALÁS (ABSTRACT)

The Saint-Venant torsion of anisotropic bars is considered. Some relationships between the torsional problems of anisotropic and isotropic bars which have different cross sections are derived. The derivation of the presented theorems is based on the application of the Prandtl's stress function formulation of the Saint-Venant torsion.

$$S = 2 \int_A U \, dA. \quad (3)$$

A θ fajlagos elcsavarodási szöveget a $\theta = M/S$ képlet alapján számoljuk, továbbá a keresztmetszet vetemedését megadó öblösödési függvény $\Omega = \Omega(x, y)$ az alábbi differenciálegyenletrendszer megoldásából nyerhető [4,5]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial U}{\partial y} + y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = - \left(\frac{1}{G} \frac{\partial U}{\partial x} + x \right) \quad (4)$$

1. BEVEZETÉS

1.1. Izotróp rúd Saint-Venant csavarása

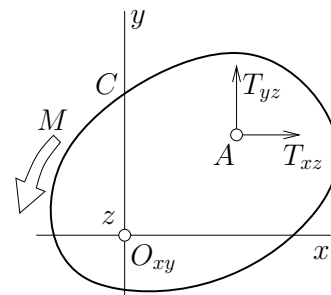
Az 1. ábra szemlélteti az izotróp anyagú rúd keresztmetszetét, csak tömör keresztmetszetű rudakkal foglalkozunk. A rúd keresztmetszeti tartományát A , a keresztmetszeti tartomány határgörbáját pedig C jelöli. A fenti keresztmetszetű rúd Saint-Venant (egyenletes csavarási feladatának megoldása az alábbi peremérték-feladatra vezethető vissza [1,2,3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= -2G & (x, y) \in A; \\ U &= 0 & (x, y) \in C \end{aligned} \quad (1)$$

ahol $U = U(x, y)$ a keresztmetszet Prandtl feszültségfüggvénye, G pedig a vizsgált rúd anyagának csúsztató rugalmassági modulusa. Az $U = U(x, y)$ függvény ismeretében a keresztmetszet síkján az M csavaró nyomaték hatására ébredő csúsztató feszültségeket az alábbi képletek alapján tudjuk meghatározni:

$$T_{xz} = \frac{M}{S} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad T_{yz} = - \frac{M}{S} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2)$$

ahol S a keresztmetszet csavarási merevségét jelöli [3,4,5,6] (1. ábra):



1. ábra. Izotróp anyagú rúd keresztmetszete.

1.2. Anizotróp rúd Saint-Venant csavarása.

Az 2. ábra szemlélteti az anizotróp rúd keresztmetszetét. A rúd keresztmetszeti tartományát „ a ”, az „ a ” keresztmetszeti tartomány határgörbáját pedig c jelöli. Az egyszerűen összefüggő „ a ” tartománnyal rendelkező anizotróp (monoklin) rúd csavarási problémája a Prandtl féle $u = u(\xi, \eta)$ feszültségfüggvény használatával az alábbi peremérték-feladat megoldására vezethető vissza [1,2,3]:

$$\begin{aligned} a_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= -2 \\ (\xi, \eta) \in a; \\ u &= 0 & (\xi, \eta) \in c \end{aligned} \quad (5)$$

A fenti egyenletben a_{44} , a_{45} és a_{55} az anizotróp (monoklin) anyag nyírási alak-változáshoz tartozó hajlékonysági együtthatóit, inverz nyírási merevségeit jelölik.

Az $u = u(\xi, \eta)$ feszültségfüggvény ismeretében a $t_{\xi z}$ és $t_{\eta z}$ csúsztató feszültségek számítására az alábbi egyenleteket használjuk [1,2,3]:

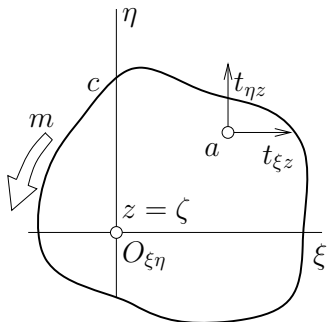
$$t_{\xi z} = \frac{m}{s} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad t_{\eta z} = -\frac{m}{s} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad (6)$$

ahol m az „ a ” keresztmetszetet terhelő csavaró nyomaték s a keresztmetszet csavarási merevsége [1,2,3] (2. ábra):

$$s = 2 \int_A u \, dA. \quad (7)$$

A ϑ fajlagos elcsavarodási szög számítására a $\vartheta = m/s$ képlet alapján végezhető. A keresztmetszet vetemedését megadó öblösödési függvény $\omega = \omega(\xi, \eta)$ a következő differenciál-egyenletrendszer megoldásából nyerhető [1,2,3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} &= a_{55} \frac{\partial u}{\partial \eta} - a_{45} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \eta} &= a_{45} \frac{\partial u}{\partial \eta} - a_{44} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \xi. \end{aligned} \quad (8)$$



2. ábra. Anizotróp anyagú rúd keresztmetszete.

2. AZ „ A ” ÉS A „ a ” TARTOMÁNYOKRA VONATKOZÓ CSAVARÁSI FELADATOK KAPCSOLATA.

Legyen az xy sík C görbéjének az egyenlete $F(x, y) = 0$ és legyen a $\xi\eta$ sík c görbéjének az egyenlete $f(\xi, \eta) = 0$.

I. Tétel. Ha

$$f(\xi, \eta) = F(\alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta) \quad (9)$$

alakban állítható elő a tetszőleges, de olyan α , β , γ és δ állandókkal, amelyek kielégítik az

$$\varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (10)$$

feltételt, akkor az izotróp rúd $U = U(x, y)$ Prandtl féle feszültségfüggvényének felhasználásával az anizotróp rúd $u = u(\xi, \eta)$ Prandtl féle feszültségfüggvénye az

$$u(\xi, \eta) = U(\alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta) \quad (11)$$

alakban állítható elő, feltéve, hogy

$$\begin{aligned} a_{44} &= \frac{1}{G} \frac{\beta^2 + \delta^2}{\varepsilon^2}, & a_{45} &= \frac{1}{G} \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\varepsilon^2}, \\ a_{55} &= \frac{1}{G} \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Bizonyítás. Az I. Tétel bizonyítása közvetlenül adódik az

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta \quad (13)$$

egyenletek által generált nem elfajuló lineáris transzformáció alkalmazásából és az α , β , γ és δ valós állandókra érvényes

$$(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) \geq (\alpha\beta + \gamma\delta)^2 \quad (14)$$

Schwarz-Bunyakovszkij-Cauchy egyenlőtlenségből, amely biztosítja, hogy a (12) képletek által definiált rugalmassági állandók kielégítik az alakváltozási energia sűrűséggel kapcsolatos pozitivitási feltételeket [1,2,3]

$$a_{44} > 0, \quad a_{55} > 0, \quad a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0. \quad (15)$$

A (15)_{1,2} egyenlőtlenségek fennállása közvetlenül következik a (12)_{1,2} egyenletekből.

II. Tétel. Érvényesek az alábbi összefüggések az izotróp „ A ” keresztmetszet és az anizotróp „ a ” keresztmetszet S és s csavarási merevségeire, valamint a megfelelő keresztmetszeti síkokon ébredő csúsztató feszültségekre (1. és 2. ábrák):

$$S = |\alpha\delta - \beta\gamma|s, \quad (16)$$

$$t_{\xi z} = \delta T_{xz} - \beta T_{yz}, \quad t_{\eta z} = \alpha T_{yz} - \gamma T_{xz}. \quad (17)$$

ha $M s - m S = 0$.

Bizonyítás. A (16) reláció helyessége közvetlenül adódik az

$$S = 2 \int_A U \, dA = 2 \int_a u \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| da \quad (18)$$

egyenletből. A (2), (6) és a (13) egyenletek kombinálásával nyerjük a (19) egyenletrendszert:

$$\alpha t_{\xi z} + \beta t_{\eta z} = \varepsilon T_{xz}, \quad \gamma t_{\xi z} + \delta t_{\eta z} = \varepsilon T_{yz}. \quad (19)$$

A (19) egyenletrendszert megoldva a $t_{\xi z}$ és a $t_{\eta z}$ ismeretlenekre jutunk a (17) képletben megfogalmazott összefüggésekre.

3. PÉLDÁK

3.1. Anizotróp ellipszis keresztmetszetű rúd

A 3.a és a 3.b ábrák egy tömör kör és egy tömör ellipszis keresztmetszetet szemléltetnek. Az izotróp kör keresztmetszetű rúd C határgörbéjének egyenlete és Prandtl féle feszültségfüggvénye az alábbi:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ U(x, y) &= \frac{G}{2}(R^2 - x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Az anizotróp ellipszis keresztmetszet határgörbéjének az egyenlete és Prandtl féle feszültségfüggvénye feltéve, hogy a (12) egyenletek fennállnak az I. Tétel alapján az alábbi alakban adhatók meg:

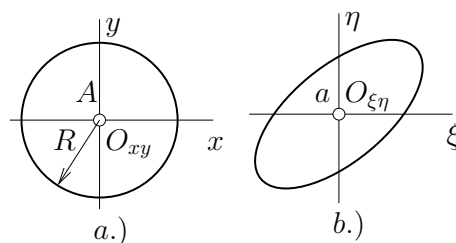
$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= (\alpha^2 + \gamma^2)\xi^2 + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)\xi\eta + \\ &\quad (\beta^2 + \delta^2)\eta^2 - R^2 = 0, \\ u(\xi, \eta) &= \frac{G}{2}(R^2 - (\alpha^2 + \gamma^2)\xi^2 - \\ &\quad 2(\alpha\beta + \gamma\delta)\xi\eta - (\beta^2 + \delta^2)\eta^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Az anizotróp rúd keresztmetszeti síkján ébredő csúsztató feszültségeket akár a (6), akár a (17) egyenletek felhasználásával közvetlenül megkaphatjuk:

$$\begin{aligned} t_{\xi z} &= -G \frac{m}{s} [(\beta^2 + \delta^2)\eta + (\alpha\beta + \gamma\delta)\xi], \\ t_{\eta z} &= G \frac{m}{s} [(\alpha^2 + \gamma^2)\xi + (\alpha\beta + \gamma\delta)\eta]. \end{aligned} \quad (22)$$

A (16) képlet alkalmazásával kapjuk az anizotróp ellipszis keresztmetszet csavarási merevségét:

$$s = \frac{G R^4 \pi}{2(\alpha\delta - \beta\gamma)}. \quad (23)$$



3. ábra. Izotróp kör és anizotróp ellipszis keresztmetszet.

A $\beta = \gamma = 0$ esetben az ellipszis főtengelyei a ξ és η tengelyekkel esnek egybe és a főtengelyek nagyságát a

$$p = \frac{R}{\alpha} \quad \text{és} \quad q = \frac{R}{\delta} \quad (24)$$

egyenletek alapján nyerjük, továbbá ez esetben

$$G a_{44} \alpha^2 = G a_{55} \delta^2 = 1, \quad a_{45} = 0. \quad (25)$$

Lekhnitskii [1,2] a p , q főtengely hosszakkal rendelkező anizotróp ellipszis keresztmetszet s csavarási merevségére az

$$s = \frac{p^3 q^3}{a_{44} q^2 + a_{55} p^2} \pi \quad (26)$$

eredményt vezetete le, amelyből jelen esetre vonatkoztatva az következők, hogy

$$s = \frac{G R^4 \pi}{2\alpha\delta}. \quad (27)$$

A (23) képlet alkalmazása is a fenti eredményre vezet.

3.2. Egyenlőszárú háromszög alakú anizotróp keresztmetszet

Ismeretes, hogy az

$$F(x, y) = (y^2 - \frac{x^2}{3})(x - H) = 0 \quad (28)$$

egyenletű határgörbével rendelkező izotróp keresztmetszet Prandtl féle feszültség-függvénye [3,4,5,6]:

$$U(x, y) = \frac{3G}{2H} (y^2 - \frac{x^2}{3})(x - H). \quad (29)$$

A fenti adatokat kombinálva a $\beta = \gamma = 0$ előírással definiált lineáris transzformációval, mikor is

$$G a_{44} \alpha^2 = G a_{55} \delta^2 = 1, \quad a_{45} = 0, \quad (30)$$

a következő egyenlettel adott

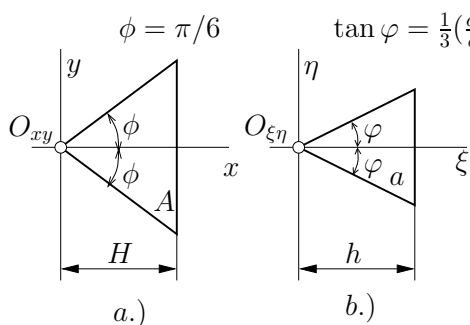
$$f(\xi, \eta) = (\delta^2 \eta^2 - \frac{\alpha^2}{3} \xi^2)(\alpha \xi - H) = 0 \quad (31)$$

c határgörbájű anizotróp keresztmetszetre kapjuk meg a csavarási feladat megoldását (4.b ábra). Az anizotróp keresztmetszet Prandtl féle feszültségfüggvénye és csavarási merevsége a (11) és (16) egyenletek alkalmazásával az alábbi alakban adható meg:

$$u(\xi, \eta) = \frac{3G}{2h} (\delta^2 \eta^2 - \frac{\alpha^2}{3} \xi^2)(\xi - h), \quad (32)$$

ahol $h = H / \alpha$ továbbá

$$s = \frac{1}{|\varepsilon|} S = G \frac{\sqrt{3} \alpha^3}{45 \delta} h^4. \quad (33)$$



4. ábra. Izotróp és anizotróp háromszög alakú keresztmetszetek.

4. ÖBLÖSÖDÉSI FÜGGVÉNYEK KAPCSOLATA

Az I. tételnél alkalmazott módszer megismétlésével bizonyítható az alábbi tétel:

II. Tétel. A (9), (10) és a (12) egyenletek fennállása esetén érvényes az alábbi egyenlet

$$\Omega(\alpha \xi + \beta \eta, \gamma \xi + \delta \eta) = \varepsilon \omega(\xi, \eta). \quad (34)$$

A (34) egyenletből az következik, hogy a 3.1 feladatban vizsgált ellipszis keresztmetszet nem vetemedik.

5. KÖVETKEZTETÉSEK

A tanulmány anizotróp anyagú tömör keresztmetszetű prizmatikus rudak Saint-Venont féle csavarási feladatának a megoldását izotróp anyagú prizmatikus rudak csavarási feladatának a megoldására vezeti vissza. Az alkalmazott módszert két példa szemlélteti. A módszer alkalmazásával nyert eredmények közvetlenül használhatók az anizotróp rudak csavarási problémáinak a megoldására szolgáló különböző numerikus eljárások pontosságának az ellenőrzésére.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A tanulmány elkészítését az OTKA K67825 és a TÁMOP 4.2.1.B-10/2/KONV programok támogatták.

5. IRODALOM

- [1] LEKHNITSKII, S.G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Mir Publishers, Moscow, 1981.
- [2] LEKHNITSKII, S. G.: Torsion of Anisotropic and Non-homogeneous Beams. Nauka, Moscow, 1971.
- [3] MILNE-THOMSON, L.M.: Antiplane Elastic Systems. Springer, Berlin, 1962.
- [4] SOKOLNIKOFF, I.S.: Mathematical Theory of Elasticity. (2nd ed.) McGraw-Hill, New York, 1956.
- [5] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N.: Theory of Elasticity (3rd ed.) McGraw-Hill, New York, 1970.
- [6] SLAUGHTER, W.S.: The Linearized Theory of Elasticity. Birkhäuser, Boston, 2002.