

Dr. habil. Szabolcsi Róbert

## HOLTIDŐS TAGOK KÖZELÍTÉSE PADÉ–SOROKKAL

### BEVEZETÉS

Az ember tevékenységének matematikai leírása már régóta tanulmányozott, és mind a mai napig érdekes területe a szabályozási rendszerek viselkedése kutatásának. A szerző célja bemutatni az emberi tevékenység matematikai modellezése során alkalmazott néhány matematikai modellt, röviden összefoglalni a holtidős tagok közelítő matematikai modelljének meghatározására széles körben alkalmazott Padé-approximáció alapösszefüggéseit. A műszaki gyakorlatban szinte kizárólag az ún. elsőrendű approximációt szokás alkalmazni. Felmerül a kérdés: elegendő-e a holtidő elsőrendű közelítésének pontossága, vagy a szigorúbb pontossági követelmények miatt magasabb rendű approximációt szükséges alkalmazni, még annak árán is, hogy a közelítés lineáris jellegét elveszítjük?! A szerző célja, hogy a gyakorlatban is jól alkalmazható matematikai–irányítástechnikai módszert javasoljon eme probléma megoldására, és egy kitüntetett matematikai modell segítségével bemutassa a módszer alkalmazásának sajátosságait. A kitűzött cél megvalósítása érdekében a szerző új MATLAB<sup>®</sup> *m*-fájlt készített, melynek segítségével bemutatja az idő-, és frekvenciatartománybeli analízis összehasonlító eredményeit.

### I. SZAKIRODALMI ÁTTEKINTÉS

A repülőgép-vezetők tevékenységének matematikai leírásával először McRuer és Krendel foglalkoztak behatóan. Munkájuk eredményét mind a mai napig széles körben alkalmazzák az automatikus repülésszabályozó rendszerek előzetes tervezése, és a rendszeranalízis során. A szerzők úgy egyváltozós, mind többváltozós irányítási rendszerekben is meghatározzák a pilóták matematikai modelljét, amely szerintük – sok egyéb tényező mellett – a követendő jel időbeli lefolyásától is lényeges mértékben függ. Bevezették a *paper pilot*<sup>1</sup> fogalmát, ami azt jelenti, hogy az automatikus repülésszabályozó rendszerek tervezése során a kormányzási rendszerben tevékenykedő pilótát matematikai modelljével helyettesítik. A szerzők különös figyelmet fordítanak az ún. precíziós repülési feladatok (pl. támadó, vagy védekező légi harc, földi célok támadása, kötelékrepülés, légi utántöltés stb.) vizsgálata során alkalmazható matematikai modellek bemutatására is [1].

A cikk elkészítésekor a matematikai elméleti alapokat Korn, G. A. és Korn, T. M. kézikönyve szolgáltatta [2].

McLean, D. könyvének mellékletében részletesen foglalkozik a pilóták tevékenységének hagyományos, és modern matematikai és irányításméleti leírásával. A pilóta holtidejének közelítésére McLean elsőrendű Padé-approximációt alkalmaz, ami a gyakorlatban csak erős megkötések és korlátok mellett alkalmazható a szabályozási rendszerek vizsgálata, és előzetes szintézise során [3].

Dorf, R. C. és Bishop, R. H. tágabb értelemben vizsgálta az operátorok matematikai modellezését: meghatározták a különféle közlekedési eszközök és járművek (pl. személygépkocsi, motorkerékpár, hajó, vonat stb.) vezetőinek matematikai modelljét. Természetesen eme modellek, általános alakjukat

---

<sup>1</sup> Elméleti és gyakorlati vizsgálatok során alkalmazható identifikált matematikai modell, amely jó közelítéssel helyettesíti az igazi pilótát.

tekintve, azonosak is lehetnek, de az egyes modellek paramétereit széles spektrumon szórva egymástól akár lényeges mértékben is eltérhetnek [4].

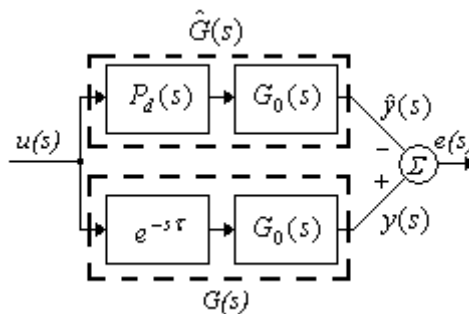
Lantos, B. foglalkozik a holtidő matematikai leírásával is, több módszert is ismertet a holtidő végtelen sorokkal történő közelítésére [5].

A szerző több hasonló témájú cikket publikált, amelyek előkészítették e cikk megírását, és egyben motiválták is eme munka elvégzésére. A [6] irodalom hagyományos és modern, ún. állapotteres irányítástechnikai módszereket mutat be a pilóta matematikai modellezésére. A [7] irodalom bemutatja, hogyan lehet meghatározni a pilóta egy kritikus paraméterét, míg a [8] irodalom a repülőgép egy irányítási csatornájában, az oldalirányú csatornában komplex módon vizsgálja a pilóta tevékenységét, és határozza meg a hajózó lehetséges kritikus paramétereit.

A cikkben bemutatott irányítástechnikai és matematikai problémák megoldására készített új MATLAB<sup>®</sup> forráskód elkészítését a [9, 10, 11] irodalmak támogatták.

## II. HOLTIDŐ KÖZELÍTÉSE A PADÉ-APPROXIMÁCIÓ SEGÍTSÉGÉVEL

A dinamikus rendszerek holtidejének közelítésére számos módszer ismert, amelyek közül a Padé approximáció az egyik legelterjedtebb [8]. A holtidő közelítésének eme módszerét és alapösszefüggéseit tekintsük át az 1. ábrán.



1. ábra. A holtidős rendszer modell-követési hibájának származtatása.

Az 1. ábrán a  $G(s)$  átviteli függvény a valós  $\tau$  holtidőt tartalmazó rendszermodell, míg a  $\hat{G}(s)$  átviteli függvény a holtidő közelítő átviteli függvényét jelöli. További vizsgálataink során feltételezzük, hogy a holtidő nélküli  $G_0(s)$  átviteli függvény minimálfázisú, és önmagában stabilis rendszerdinamikát ad meg. A holtidő közelítésének problémája a következő módon fogalmazható meg: az eredeti

$$G(s) = e^{-s\tau} G_0(s) \quad (2.1)$$

átviteli függvény a

$$\hat{G}(s) = P_d(s) G_0(s), \quad (2.2)$$

átviteli függvényű modellel közelíthető, ahol  $P_d(s) = N_d(s) / D_d(s)$  a  $\tau$  holtidőt közelítő racionális törtfüggvény. E közelítési probléma másik megfogalmazása: határozzuk meg a holtidőt közelítő  $P_d(s)$  átviteli függvény azon alakját, amely biztosítja az eredeti (2.1) holtidős rendszer (2.2) modellel történő kellő pontosságú approximációját. A közelítés pontossága az  $e(s)$  hibajel alapján ítéhető meg: a  $G(s)$  és a  $\hat{G}(s)$  rendszerek bemenetére kapcsoljuk ugyanazt az  $u(s)$  bemeneti jelet, majd az egyes rendszermodellek kimeneti jeleit vonjuk ki egymásból. A hibajel alapján megítélhető, hogy a  $G(s)$  és a  $\hat{G}(s)$  rendszerek mennyire közelítik egymást. Más szóval, megállapítható, hogy a  $P_d(s)$

közelítő polinom milyen pontossággal reprezentálja a  $\tau$  holtidőt. Szabályozástechnikában ez a probléma a *modell követési feladat* nevet viseli. A modell követési hiba (MME<sup>2</sup>) az alábbi egyenlet alapján határozható meg [2, 5, 8, 11]:

$$MME \hat{=} \sup_{u \neq 0} \frac{\|e\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y - \hat{y}\|_2}{\|u\|_2}, \quad (2.3)$$

ahol:  $\|y - \hat{y}\|_2$  a hibajel második (euklidészi) normája,  $\|u\|_2$  a bemeneti jel második (euklidészi) normája. A (2.3) egyenlet szerint a modell követési hiba (MME) a kimeneti jel energiája, és a bemeneti jel energiája hányadosának maximális lehetséges hányadosa. Szabályozástechnikából ismeretes, hogy az MME értéke az alábbi összefüggések alapján számítható:

$$MME \equiv MME_{H_\infty} \equiv MME_{L_\infty}, \quad (2.4)$$

ahol

$$MME_{H_\infty} = \left\| G - \hat{G} \right\|_{H_\infty}, \quad (2.5)$$

$$MME_{L_\infty} = \sup_{\omega} |G(j\omega) - \hat{G}(j\omega)| = \sup_{\omega} \left| G_0(j\omega) \cdot \left| e^{-j\omega\tau} - P_d(j\omega) \right| \right|. \quad (2.6)$$

Könnyen belátható, hogy kisértékű  $MME_{L_\infty}$  esetén a  $G(s)$  és a  $\hat{G}(s)$  átviteli függvények Nyquist diagramjai is – ha  $G_0(s)$  önmagában stabilis – jó közelítéssel egybeesnek. Mindezek alapján, az  $e^{-s\tau}$  holidós tag közelítése a következőképpen is megfogalmazható: határozzuk meg a holtidőt közelítő  $P_d(s)$  racionális törtfüggvény alakú átviteli függvényt, amely biztosítja, hogy a közelítés pontatlansága kisebb, mint egy definiált skalár, amelyre igaz, hogy  $\delta > 0$ . A holtidő Padé–sorral történő közelítésére a továbbiakban a következő egyenletet alkalmazzuk [2, 5, 8]:

$$e^{-s\tau} \cong P_d(s) = \frac{N_d(s)}{D_d(s)} = \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k \tau^k s^k}{\sum_{k=0}^n c_k \tau^k s^k}, \quad (2.7)$$

ahol a (2.7) egyenlettel megadott Padé–sor együtthatóit az alábbi képlet segítségével számíthatjuk:

$$c_k = \frac{(2n-k)! \cdot n!}{2n! \cdot k! \cdot (n-k)!}; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.8)$$

A Padé–sor  $n \leq 20$  fokszámára kiszámított együtthatókat az 1. Melléklet tartalmazza.

## 2.1. A Padé–sor approximációs fokszámának meghatározása

Szabályozási rendszerek vizsgálata, és előzetes tervezése során gyakran felmerül a következő probléma: mi a Padé–sor minimális fokszáma, amely esetén az approximációs hiba – a tűrészemzőn belül – maximális?! Az approximációs hiba a (2.6) egyenlet alapján már könnyen kiszámítható, vagyis:

---

<sup>2</sup> Model Matching Error

$$\left| e^{-j\omega\tau} - P_d(j\omega) \right| \leq \begin{cases} 2 \left( \frac{e\omega\tau}{4n} \right)^{2n+1}, & \text{ha } \omega \leq \frac{4n}{e\tau} \\ 2, & \text{ha } \omega \geq \frac{4n}{e\tau} \end{cases}. \quad (2.9)$$

A (2.9) egyenletet felhasználva, a közelítési fokszám meghatározása az alábbi lépésekben történik:

1. lépés: A  $G_0(j\omega)$  frekvenciafüggvény abszolút érték függvénye alapján határozzuk meg az  $\omega_x$  körfrekvenciát, amelyre igaz, hogy [8]:

$$|G_0(j\omega)| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \forall \omega \geq \omega_x, \quad (2.10)$$

és első lépésben legyen  $n = 1$ .

2. lépés: minden  $n \geq 1$  esetére legyen

$$\omega_n = \max \left\{ \omega_x, \frac{4n}{e\tau} \right\}, \quad (2.11)$$

és e körfrekvenciákra határozzuk meg a hibajel függvényének abszolút értékét, amely az alábbi összefüggés alapján is kiszámítható:

$$\varepsilon(\omega) \triangleq \begin{cases} 2|G_0(j\omega)| \left( \frac{e\omega\tau}{4n} \right)^{2n+1}, & \text{ha } \omega \leq \frac{4n}{e\tau} \\ 2|G_0(j\omega)|, & \text{ha } \omega_n \geq \omega \geq \frac{4n}{e\tau} \end{cases}. \quad (2.12)$$

3. lépés: Vezessük be a következő mennyiséget

$$E(n) = \frac{1}{\delta} \max \{ \varepsilon(\omega) \}; \quad \omega \in [0, \omega_x]. \quad (2.13)$$

Ha  $E(n) \leq 1$ , akkor befejezzük a számítási műveletet. Ebben az esetben  $n$  a közelítő Padé-sor azon fokszáma, amely kielégíti az előírt közelítési pontosságot, más szóval, teljesül az alábbi egyenlőtlenségi feltétel:

$$MME_{L_\infty} \leq \delta. \quad (2.14)$$

Ha az  $E(n) \leq 1$  egyenlőtlenségi feltétel nem teljesül, akkor egygyel  $n$  értékét, és a 2. lépéstől újra folytatjuk a számítást. E műveleti sort mindaddig folytatjuk, amíg teljesül, hogy  $E(n) \leq 1$ .

4. lépés: nyomtassuk ki a hibajel

$$|G_0(j\omega)| \cdot \left| e^{-j\omega\tau} - P_d(j\omega) \right| \quad (2.15)$$

frekvencia függvényét, és igazoljuk, hogy annak maximális értéke kisebb, mint  $\delta$ .

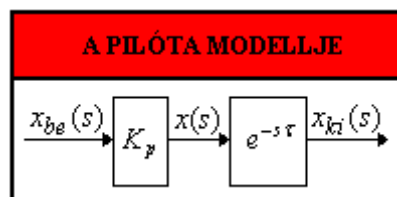
Nagy pontosságú számítások során a matematikai approximáció pontossága általában  $\delta = (10^{-4} \div 10^{-2})$ . Mindazonáltal, szabályozástechnikából ismeretes például, hogy a tranziens időt az átmeneti függvény stacionér értékének  $\pm 2\%$ , vagy  $\pm 5\%$  -os tartományán belülre kerüléskor mérjük. Könnyű belátni tehát, hogy a matematikai közelítés pontossága sokkal szigorúbb, mint az irányításelméleti pontossági követelmény, ezért a gyakorlatban kompromisszumot kell kötni, hogy mely pontossági követelményt szeretnénk teljesíteni [8].

### III. A PILÓTA TEVÉKENYSÉGÉNEK NÉHÁNY EGYSZERŰBB MATEMATIKAI MODELLJE

A pilóta tevékenységének legegyszerűbb matematikai modellje, egy bemeneti jel követése estén, a 2. ábra felhasználásával, az alábbi egyenlettel adható meg [1, 3, 6, 7, 8]:

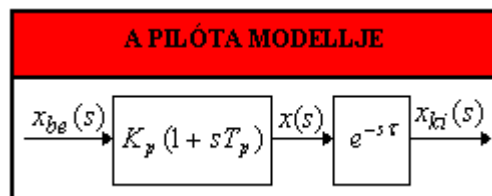
$$Y_p(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = K_p e^{-s\tau}, \quad (3.1)$$

ahol  $x_{be}(s)$  a pilóta által követett bemeneti jel,  $x_{ki}(s)$  a pilóta válaszele,  $K_p$  a pilóta erősítési tényezője,  $\tau$  a pilóta tevékenységének holtideje.



2. ábra. A pilóta tevékenységének PH–matematikai modellje.

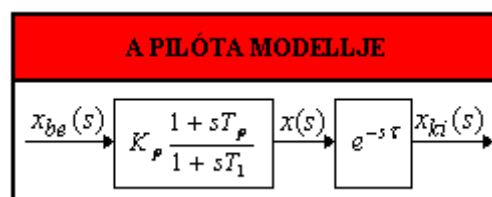
A 2. ábra, valamint a (3.1) egyenlet alapján könnyen belátható, hogy a pilóta tevékenységét arányos (proporcionális), holtidős (H) taggal (PH) lehet leírni [6, 7, 8]. Ha a repülőgép-vezető azon tulajdonságát is figyelembe vesszük, hogy predikcióra is képes, akkor a tevékenységének matematikai modelljét a 3. ábrán látható hatásvázlattal adhatjuk meg.



3. ábra. A pilóta tevékenységének PDH–matematikai modellje.

$$Y_p(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = K_p(1 + sT_p) e^{-s\tau}, \quad (3.2)$$

ahol  $T_p$  predikciós (valós differenciálási) időállandó. A (3.2) egyenlettel megadott matematikai modell arányos-differenciáló-holtidős (PDH). A továbbiakban vegyük figyelembe a repülőgép-vezető izomrendszerének dinamikus viselkedését is, amelyet egytárolós dinamikával veszünk figyelembe. A repülőgép-vezető modellje a 4. ábrán látható.



4. ábra. A pilóta tevékenységének PDT1H–matematikai modellje.

A 4. ábra alapján a repülőgép-vezető átviteli függvénye már könnyen felírható:

$$Y_p(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = K_p \frac{1 + sT_p}{1 + sT_1} e^{-s\tau}, \quad (3.3)$$

ahol  $T_1$  a repülőgép-vezető izom-rendszerének időkéscése. A (3.3) egyenletet szokás PDT1H-modellnek is nevezni. A 4. ábra alapján a (3.3) átviteli függvény az alábbi alakban is felírható:

$$Y_p(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = \frac{x(s)}{x_{be}(s)} \frac{x_{ki}(s)}{x(s)} = K_p \frac{1 + sT_p}{1 + sT_1} e^{-s\tau}. \quad (3.4)$$

A (3.4) egyenlet alapján a holtidő bemeneti jele a következő összefüggés alapján számítható:

$$x(s) = K_p \frac{1 + sT_p}{1 + sT_1} x_{be}(s). \quad (3.5)$$

A (3.5) egyenlet időtartományban a következő alakban írható fel:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T_1} x + \frac{K_p}{T_1} x_{be} + \frac{K_p T_p}{T_1} \dot{x}_{be}. \quad (3.6)$$

A (3.3) egyenletben a  $\tau$  holtidő közelítésére alkalmzzuk az 1-rendű Padé-approximációt. Az alábbi egyenletet kapjuk:

$$Y_p(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = K_p \frac{1 + sT_p}{1 + sT_1} e^{-s\tau} = K_p \frac{1 + sT_p}{1 + sT_1} \left( \frac{1 - \tau/2s}{1 + \tau/2s} \right). \quad (3.7)$$

A repülőgép-vezető tevékenységének modellezésére széles körben alkalmazzák az állapotér reprezentációs alakokat. Vezessük be az alábbi állapot-változókat [3, 6, 7, 8]:

$$x_1 = x_{ki} + x, \quad (3.8)$$

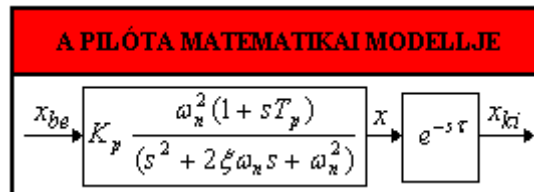
$$x_2 = x. \quad (3.9)$$

A (3.3)–(3.9) egyenletek felhasználásával a repülőgép-vezető állapotéres matematikai modellje már könnyen felírható, vagyis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_p T_p}{T_1} \end{bmatrix} \dot{x}_{be} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\tau} & \frac{4}{\tau} \\ 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_p}{T_p} \end{bmatrix} x_{be}, \quad (3.10)$$

$$x_{ki} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Végezetül, ha figyelembe vesszük a repülőgép-vezető érzékelő/jelfeldolgozó/beavatkozó ideg-izom rendszerének a matematikai modelljét is, akkor a pilóta tevékenységének hatásvázlata az 5. ábrának megfelelően adható meg [1, 3, 6, 7, 8]:



5. ábra. A pilóta tevékenységének matematikai modellje.

Az 5. ábra alapján írjuk fel a repülőgép-vezető átviteli függvényét:

$$Y_p(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = \frac{x_{ki}(s)}{x(s)} \frac{x(s)}{x_{be}(s)} = K_p \frac{\omega_n^2(1+sT_p)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} e^{-s\tau}. \quad (3.12)$$

A (3.12) egyenletben az

$$\frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3.13)$$

kéttárolós (T2) tag a repülőgép-vezető ideg-izom rendszerének egyszerűsített matematikai modelljét adja meg [1, 3, 6, 7, 8]. Könnyen belátható, hogy a (3.12) egyenlet holtidő nélküli PDT2 alakú

$$Y = \frac{x(s)}{x_{in}(s)} = K_p \frac{\omega_n^2(1+sT_p)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3.14)$$

átviteli függvénye időtartományban az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_{be}, \quad (3.15)$$

$$x = \omega_n^2 K_p \begin{bmatrix} 1 & T_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Vezessük be a következő állapot-változót:

$$x_3 = x_{ki} + x. \quad (3.17)$$

A (3.12) egyenletben szereplő  $\tau$  holtidőt approximáljuk 1-rendű Padé-sorral, más szóval,

$$e^{-s\tau} \cong \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s}. \quad (3.18)$$

Helyettesítsük a (3.18) egyenletet a (3.12) egyenletbe, és írjuk fel a kapott kifejezést időtartományban. Néhány egyszerű matematikai átalakítás után az alábbi állapot-, és kimeneti egyenletet kapjuk [1, 3, 6, 7, 8]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n & 0 \\ \left(\frac{4}{\tau} K_p \omega_n^2\right) & \left(\frac{4}{\tau} K_p T_p \omega_n^2\right) & \left(-\frac{2}{\tau}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{be}, \quad (3.20)$$

$$x_{ki} = \begin{bmatrix} -\omega_n^2 K_p & -\omega_n^2 K_p T_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

A (3.1)–(3.21) alkalmasak arra, hogy idő-, és frekvenciatartományban elvégezzük a bemutatott matematikai modellek vizsgálatát. A cikk további fejezetei eme vizsgálatok eredményeit mutatják be.

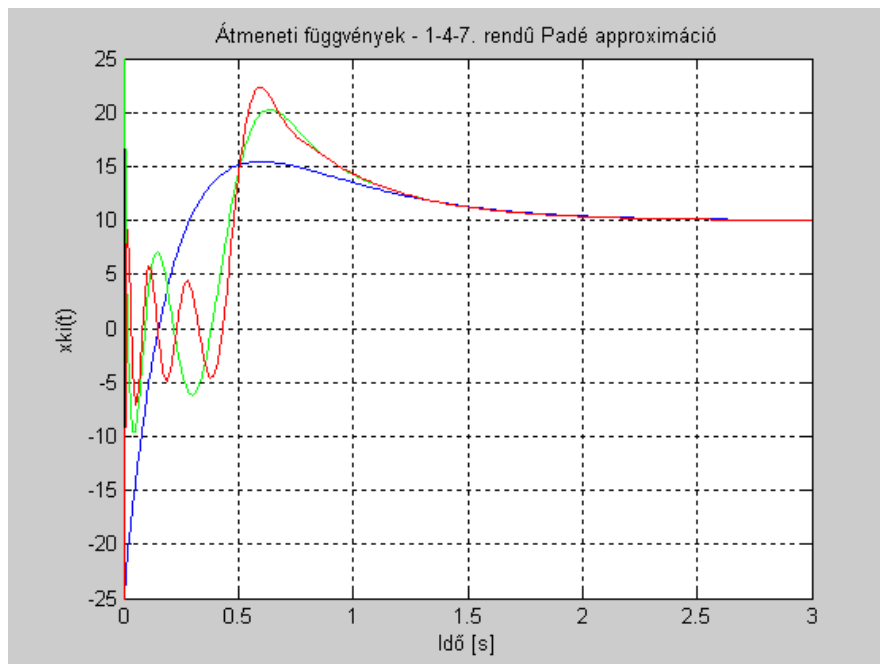
## IV. A REPÜLŐGÉP-VEZETŐ MATEMATIKAI MODELLJÉNEK VIZSGÁLATA IDŐTARTOMÁNYBAN

A repülőgép-vezető tevékenységének egyik legfontosabb formája az alapjel követés. Számos repülési feladat (pl. félautomatikus bejövétel leszálláshoz, légi utántöltés, légi harc, felszíni célok támadása, kismagasságú terepkövetés, kötelékrepülés, műrepülés stb.) megoldása során a pilóta a számára megjelenített alapjelet követi, amelyek – időbeli lefolyásukat tekintve – különféle jellegűek lehetnek. A leggyakoribb lekövetendő alapjelek a következők: (egység)ugrásfüggvény, (egység)sebességfüggvény, fűrészjel, négyszögjel, harmonikus szinuszos jel. A szerző az időtartománybeli vizsgálata során az ugrásfüggvény, a sebesség függvény, és a négyszögjel vizsgálatát alkalmazza [9, 10, 11].

Az előző fejezetben bemutatásra kerültek a repülőgép-vezető leggyakrabban használt matematikai modelljei. Tekintettel a továbbiakban alkalmazandó vizsgálati módszer általános jellegére, az időtartománybeli vizsgálatok során e fejezetben a (3.3) egyenlettel megadott PDT1H-modellt alkalmazza. A repülőgép-vezető eme matematikai modelljének paraméterei legyenek az alábbiak [1, 3, 6, 7, 8]:

$$K_p = 10; T_p = 1s; T_1 = 0,4s; \tau = 0,5s . \quad (4.1)$$

A repülőgép-vezető PDT1H-modelljének vizsgálata során feltételeztük, hogy a holtidő approximációja során az 1-rendű közelítés mellett a 4.-ed, és a 7-ed rendű approximációt alkalmazzuk. Így a repülőgép-vezető átmeneti függvényét három dinamikus modellre – az 1. Melléklet segítségével – is meghatározzuk. A repülőgép-vezető alapjele, más szóval, a követni kívánt bemeneti jele az egységugrás jel,  $x_{be}(t) = 1(t)$ . A számítógépes szimuláció eredménye a [9, 10, 11].

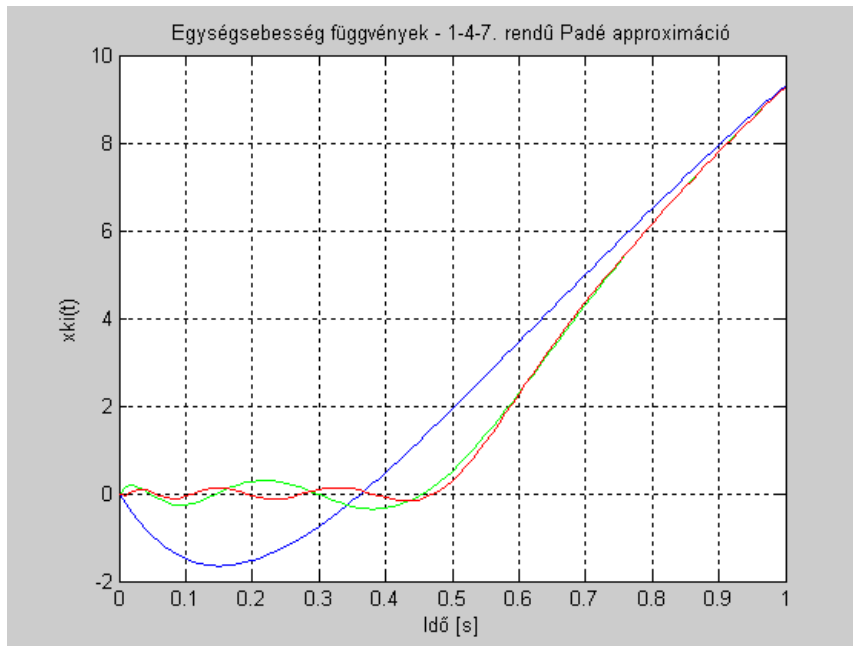


6. ábra. A repülőgép-vezető átmeneti függvényei.  
'elsőrendű —' 'negyedrendű —' 'hetedrendű —' Padé approximáció

A 6. ábrán jól látható, hogy az approximáció fokszámának emelkedése az átmeneti függvény maximumának növekedését eredményezi. A holtidő tartományában az átmeneti függvények, bár egyre nagyobb frekvenciájú lengésekkel, de mégis közelítik az ideális, zérusértékű átmeneti függvényt.

A 7. ábrán a repülőgép-vezető egységsebesség bemeneti jelle adott válaszfüggvényei láthatóak az approximáció különféle fokszámai mellett. A vizsgálatok során a repülőgép-vezető bemeneti jele az  $x_{be}(t) = t$  volt [9, 10, 11].

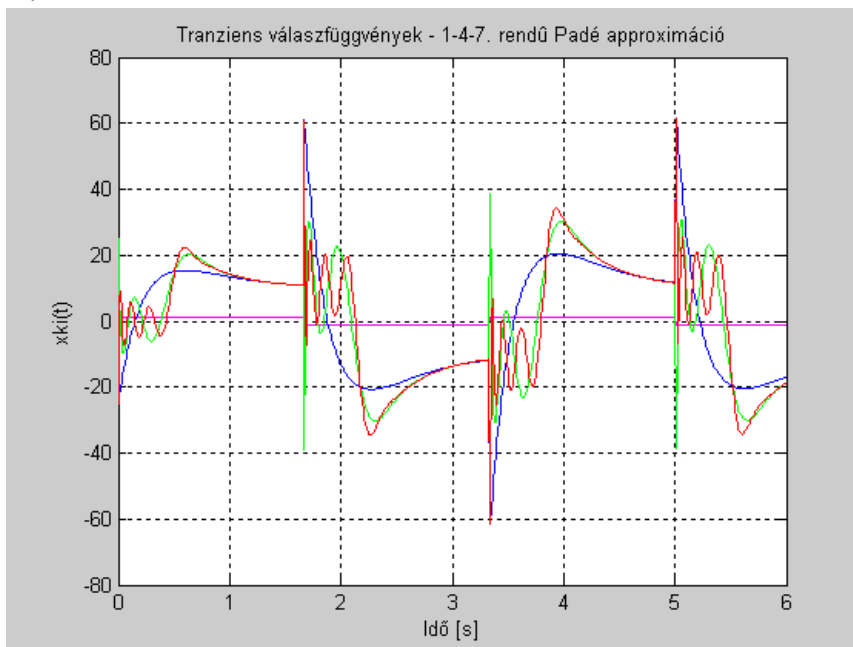




7. ábra. A repülőgép-vezető egységsebesség válaszfüggvényei.  
 'elsőrendű —' 'negyedrendű —' 'hetedrendű —' Padé approximáció

A 7. ábra alapján könnyen belátható, hogy az approximáció fokszámának emelkedésével a közelítési hiba folyamatosan csökken, és a holtidő időtartományában a bemeneti jelre adott válaszfüggvény egyre jobban közelíti az ideális zérus kezdeti értéket.

Végezetül, vizsgáljuk meg a repülőgép-vezető alapjel követési képességét, ha a követendő bemeneti jel  $f = 0,3 \text{ Hz}$  frekvenciájú, vagyis  $T = 1/0,3 \text{ s}$  periódusidejű négyszögjel. A számítógépes analízis eredménye a 8. ábrán látható [9, 10, 11].

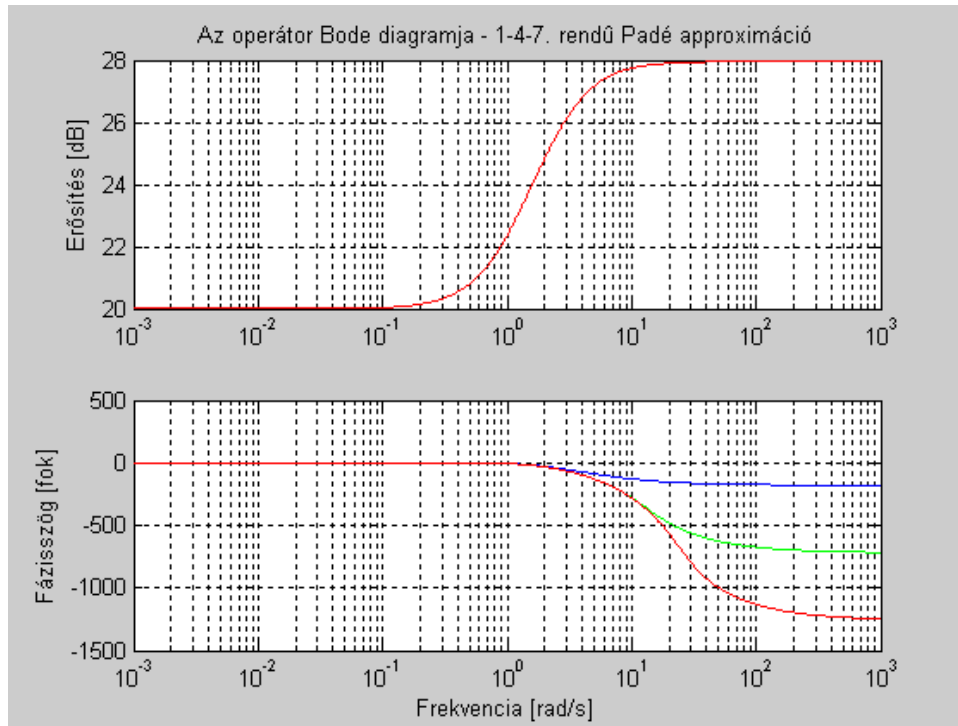


8. ábra. A repülőgép-vezető válaszjele a négyszögjel bemeneti jelre.  
 'elsőrendű —' 'negyedrendű —' 'hetedrendű —' Padé approximáció

A 8. ábra alapján megállapítható, hogy – hasonlóképpen a korábbi bemeneti jelekre adott válaszfüggvényekhez – az approximáció fokszámának emelkedése a válaszjel maximális értékének növekedését eredményezi, viszont a holtidő tartományában egyre jobban közelíti az ideális zérusértékű kimeneti jelet.

## V. A REPÜLŐGÉP-VEZETŐ MATEMATIKAI MODELLJÉNEK VIZSGÁLATA FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

A frekvenciatartománybeli vizsgálatok során feltételezzük, hogy a repülőgép-vezető által követendő jel harmonikusan váltakozó, egységnyi amplitudójú, szinuszos jel. A számítógépes szimuláció eredménye a 9. ábrán látható [9, 10, 11].



9. ábra. A repülőgép-vezető Bode-diagramja.

‘elsőrendű’.....’negyedrendű’.....’hetedrendű’ Padé approximáció

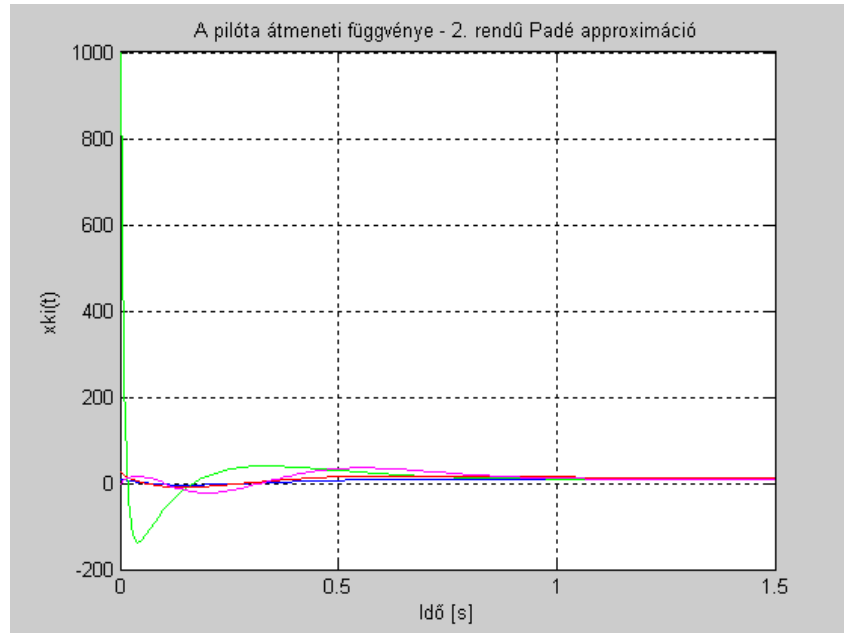
A 9. ábra alapján megállapítható, hogy a vizsgált frekvenciatartományban az erősítés – gyakorlatilag – független az approximáció fokszámától, és mindhárom erősítési görbe együtt fut. Kis-, és közepes frekvenciákon a fázisgörbék is együtt futnak, majd  $f \cong 2 \text{ Hz}$  frekvenciától a görbék elválnak egymástól, és az approximáció fokszámának emelkedésével egyre csökken a fázisszög értéke.

## VI. A REPÜLŐGÉP-VEZETŐ MATEMATIKAI MODELLJEI VISELKEDÉSÉNEK ÖSSZEHASONLÍTÓ ELEMZÉSE

Az előző fejezetben bemutatott számítógépes szimulációt a repülőgép-vezető PDT1H-modelljén hajtottuk végre, változtatva az approximáció fokszámát. A gyakorlatban gyakran felmerül az a kérdés, hogy „a repülőgép-vezető mely matematikai modelljét alkalmazzuk?” Az automatikus repülésszabályozó rendszerek vizsgálatának elméletéből ismert tény, hogy a repülőgép-vezető – a repülőgép irányítása során – többcsatornás irányítási rendszerben, több állapot-változót is manipulál. Példának okáért álljon most itt a repülőgép félautomatikus leszállítása, amikor a repülőgép-vezető számos repülési paramétert – parancsjelek alapján – kézi beavatkozással irányít. Ilyen repülési jellemző, a teljesség igénye nélkül, a repülési sebesség, a függőleges sebesség, a repülési magasság, a leszállópályától mért távolság, a siklopályától mért szögeltérés, az iránypályától mért szögeltérés. A megoldandó repülési feladat komplexitásának növekedésével a repülőgép-vezető egyre egyszerűbb matematikai modelljét alkalmazhatjuk [1, 3, 6, 7, 8].

Vizsgáljuk meg a repülőgép-vezető különféle matematikai modelljének viselkedését a holtidő másodrendű Padé-sorral történő közelítése esetén. A repülőgép-vezető matematikai modelljeit a 3. fejezet (3.1), (3.2), (3.3), és a (3.12) egyenletek adják meg. A repülőgép-vezető időtartománybeli viselkedésének vizsgálatát korlátozzuk az átmeneti függvény (10. ábra), az egységsebesség bemeneti jelre adott válaszjel (11. ábra), és a négyszögjel bemenetre adott válaszjel (12. ábra) analízisére.

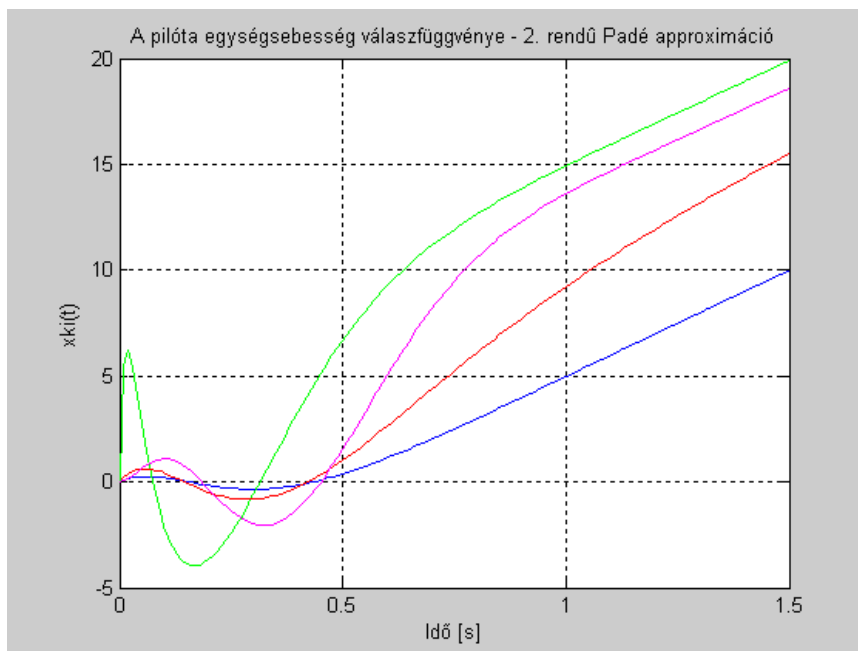
A repülőgép-vezető bemeneti jele legyen az  $x_{be}(t) = 1(t)$  egységugrás jel. A repülőgép-vezető válaszfüggvényei – különféle rendszermodellek esetére – a 10. ábrán láthatóak.



10. ábra. A repülőgép-vezető átmeneti függvényei.

PH-modell    PDH-modell    PDT1H-modell    PDT2H-modell

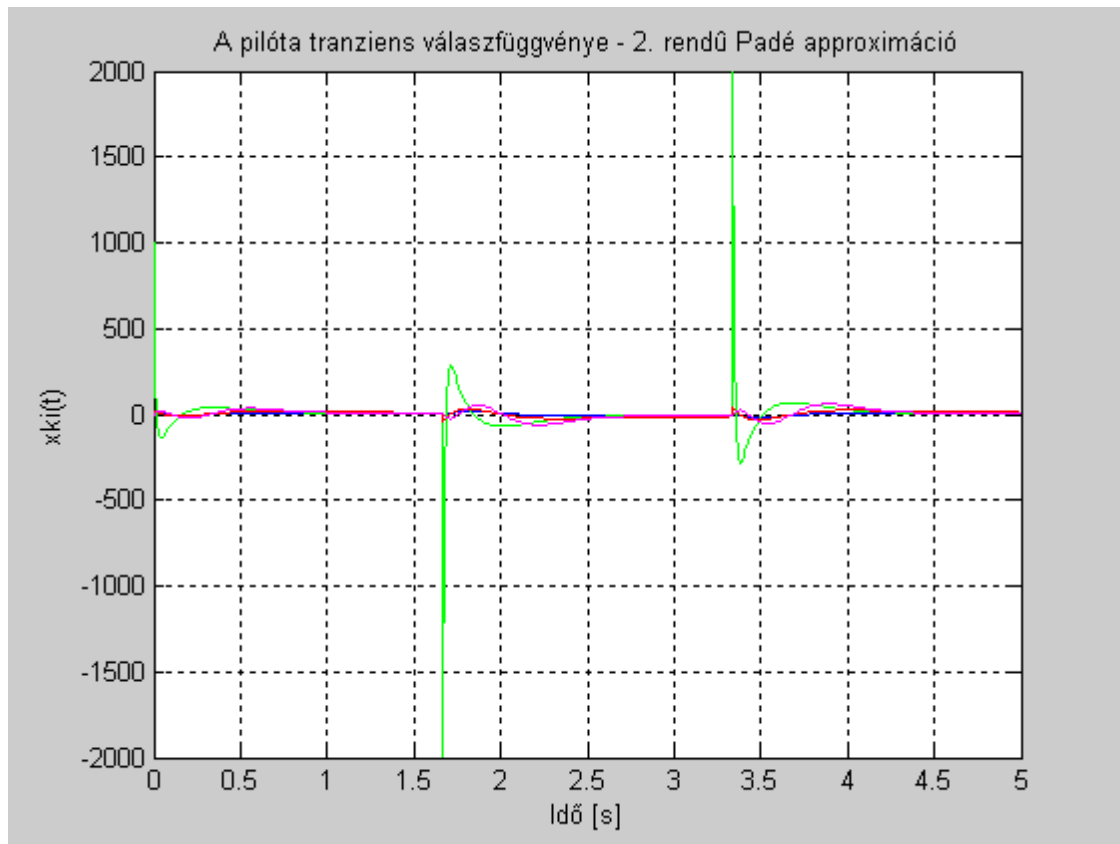
Vizsgáljuk meg, hogy a repülőgép-vezető hogyan képes lekövetni az egységsebesség bemeneti jelet. A tranziens analízis során a bemeneti jel legyen a  $x_{be}(t) = t$  jel. A repülőgép-vezető válaszjelei a 11. ábrán láthatóak.



11. ábra. A repülőgép-vezető válaszjelei az egységsebesség bemeneti jelre.

PH-modell    PDH-modell    PDT1H-modell    PDT2H-modell

Végezetül, vizsgáljuk meg, hogy a repülőgép-vezető az előjelváltó négyszöjelet, mint bemeneti jelet hogyan képes követni. A bemeneti jel  $f=0,3\text{ Hz}$  frekvenciájú, egységnyi amplitúdójú négyszögjel. A repülőgép-vezető válaszfüggvénye a 12. ábrán látható.



12. ábra. Transient Responses of the Human Pilot

PH-modell PDH-modell PDT1H-modell PDT2H-modell

A 10., 11., és a 12. ábrákon jól látható, hogy a (3.1) egyenlettel megadott alapmodellben (PH-modell) bevezett differenciáló (D) hatás (PDH-modell) a transziens folyamatokban nagy értékű túllendüléseket eredményez. Ha a repülőgép-vezető matematikai modelljét egytárolós taggal bővítjük (PDT1H-modell), akkor csökken a válaszfüggvények lengési hajlama. Ha a repülőgép-vezető érzékelő/jelfeldolgozó/beavatkozó ideg-izom rendszerének egyszerűsített matematikai modelljét is figyelembe vesszük, akkor az alapesethez képest növekszik a transziens folyamatok lengési hajlama (PDT2H-modell). E vizsgálatokat természetesen magasabb rendű approximációs modellekre is elvégezhetjük, és a közelítés fokszámában paraméterezett görbesereget kapunk, amelyet már egyszerű kiértékelni, megvizsgálni azok minőségi jellemzőit.

A repülőgép-vezető fent bemutatott transziens analiziséből következik egy másik fontos, és érdekes kérdéskör: *a holtidő adott pontosságú közelítése során milyen legyen a Padé-sor fokszáma?* E kérdéskör megválaszolását a 7. fejezet taglalja.

## VII. A PADÉ-APPROXIMÁCIÓ MINIMÁLIS FOKSZÁMÁNAK MEGHATÁROZÁSA

A 2.1. fejezet már foglalkozott a Padé-approximáció minimális fokszámának meghatározásával. Az 1. ábra alapján azonban kínálkozik egy másik, inkább gyakorlatias módszer is az adott pontosságú Padé-approximációs közelítés fokszámának meghatározására. Eme módszer lényege: hasonlítsuk össze a  $\tau$  holtidőt tartalmazó eredeti  $G(s)$ , és a holtidő közelítő modelljét tartalmazó  $\hat{G}(s)$

rendszerek Nyquist-diagramjait, és addig növeljük a közelítés fokszámát, amíg az eredeti és a közelítő rendszer Nyquist-diagramjai közötti különbség a megadott pontossági tűrésmezőbe nem esik. További vizsgálataink során legyen a közelítés pontosságának értéke a következő:

$$\delta \leq 0,02. \quad (7.1)$$

Tekintettel arra, hogy a cikk módszert mutat be, az egyszerűség miatt legyen a repülőgép-vezető vizsgálat tárgyát képező matematikai modellje PT1H (arányos-egytárolós-holtidős). Természetesen, vizsgálatainkat tetszőleges matematikai modellre elvégezhetjük. A repülőgép-vezető tevékenységét leíró matematikai modell most a következő lesz [1, 3, 6, 7, 8]:

$$Y_p(s) = G(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = \frac{K_p}{1 + sT_1} e^{-s\tau}. \quad (7.2)$$

A (7.2) egyenlettel megadott átviteli függvény alapján a frekvenciafüggvény az  $s = j\omega$  helyettesítéssel könnyen meghatározható [5]:

$$G(s)|_{s=j\omega} = \frac{x_{ki}(j\omega)}{x_{be}(j\omega)} = \frac{K_p}{1 + j\omega T_1} e^{-j\omega\tau} = \frac{K_p(1 - j\omega T_1)}{1 + (\omega T_1)^2} e^{-j\omega\tau} = P_H(\omega) + jQ_H(\omega). \quad (7.3)$$

A (7.3) egyenletben

$$P_H(\omega) = \text{real} \left( \frac{K_p(1 - j\omega T_1)}{1 + (\omega T_1)^2} e^{-j\omega\tau} \right) \quad (7.4)$$

a  $G(j\omega)$  frekvenciafüggvény valós része, míg a

$$Q_H(\omega) = \text{imag} \left( \frac{K_p(1 - j\omega T_1)}{1 + (\omega T_1)^2} e^{-j\omega\tau} \right). \quad (7.5)$$

a  $G(j\omega)$  frekvenciafüggvény képzetes része.

Az 1. ábra alapján a repülőgép-vezető közelítő matematikai modelljét az alábbi átviteli függvény adja meg:

$$\hat{G}(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} \cong \frac{K_p}{1 + sT_1} P_d(s). \quad (7.6)$$

Határozzuk meg a (7.6) közelítő matematikai modell frekvenciafüggvényét, vagyis a (7.6) egyenletben végezzük el az  $s = j\omega$  helyettesítést:

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{x_{ki}(j\omega)}{x_{be}(j\omega)} \cong \frac{K_p}{1 + j\omega T_1} P_d(j\omega) = \frac{K_p(1 - j\omega T_1)}{1 + (\omega T_1)^2} \frac{1 - \frac{1}{2}(j\omega\tau) + \frac{1}{12}(j\omega\tau)^2 + \dots}{1 + \frac{1}{2}(j\omega\tau) + \frac{1}{12}(j\omega\tau)^2 + \dots}. \quad (7.7)$$

A (7.7) kifejezés alapján könnyen belátható, hogy a frekvenciafüggvény komplex, és írjuk fel annak algebrai alakját is:

$$\hat{G}(j\omega) \cong \frac{K_p(1-j\omega T_1) \left(1 - \frac{1}{2}(j\omega\tau) + \frac{1}{12}(j\omega\tau)^2 + \dots\right)}{1 + (\omega T_1)^2 \left(1 + \frac{1}{2}(j\omega\tau) + \frac{1}{12}(j\omega\tau)^2 + \dots\right)} = P_{köz}(\omega) + jQ_{köz}(\omega), \quad (7.8)$$

ahol

$$P_{köz}(j\omega) \cong \text{real} \left( \frac{K_p(1-j\omega T_1) \left(1 - \frac{1}{2}(j\omega\tau) + \frac{1}{12}(j\omega\tau)^2 + \dots\right)}{1 + (\omega T_1)^2 \left(1 + \frac{1}{2}(j\omega\tau) + \frac{1}{12}(j\omega\tau)^2 + \dots\right)} \right) \quad (7.9)$$

a  $\hat{G}(j\omega)$  frekvenciafüggvény valós része, míg

$$Q_{köz}(j\omega) \cong \text{imag} \left( \frac{K_p(1-j\omega T_1) \left(1 - \frac{1}{2}(j\omega\tau) + \frac{1}{12}(j\omega\tau)^2 + \dots\right)}{1 + (\omega T_1)^2 \left(1 + \frac{1}{2}(j\omega\tau) + \frac{1}{12}(j\omega\tau)^2 + \dots\right)} \right) \quad (7.10)$$

a  $\hat{G}(j\omega)$  frekvenciafüggvény képzetes része.

Könnyű belátni, hogy a holtidő Padé-approximációs fokszámát addig szükséges emelni, amíg egyidejűleg teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségi feltételek:

$$|\Delta P(\omega)| = |P_H(\omega) - P_{köz}(\omega)| \leq \delta, \quad (7.11)$$

és

$$|\Delta Q(\omega)| = |Q_H(\omega) - Q_{köz}(\omega)| \leq \delta. \quad (7.12)$$

A Padé-approximáció azon fokszáma, amelyre először teljesülnek a (7.11)–(7.12) feltételek, az ún. *minimális fokszám*, amelyet a közelítés megadott pontosságának biztosítása érdekében a vizsgálatok és a tervezési feladatok megoldása során alkalmazni szükséges. A Padé-approximáció minimális fokszáma Nyquist-diagram segítségével történő meghatározására vegyük az alábbi példát. Legyen a repülőgép-vezető dinamikus modellje a következő:

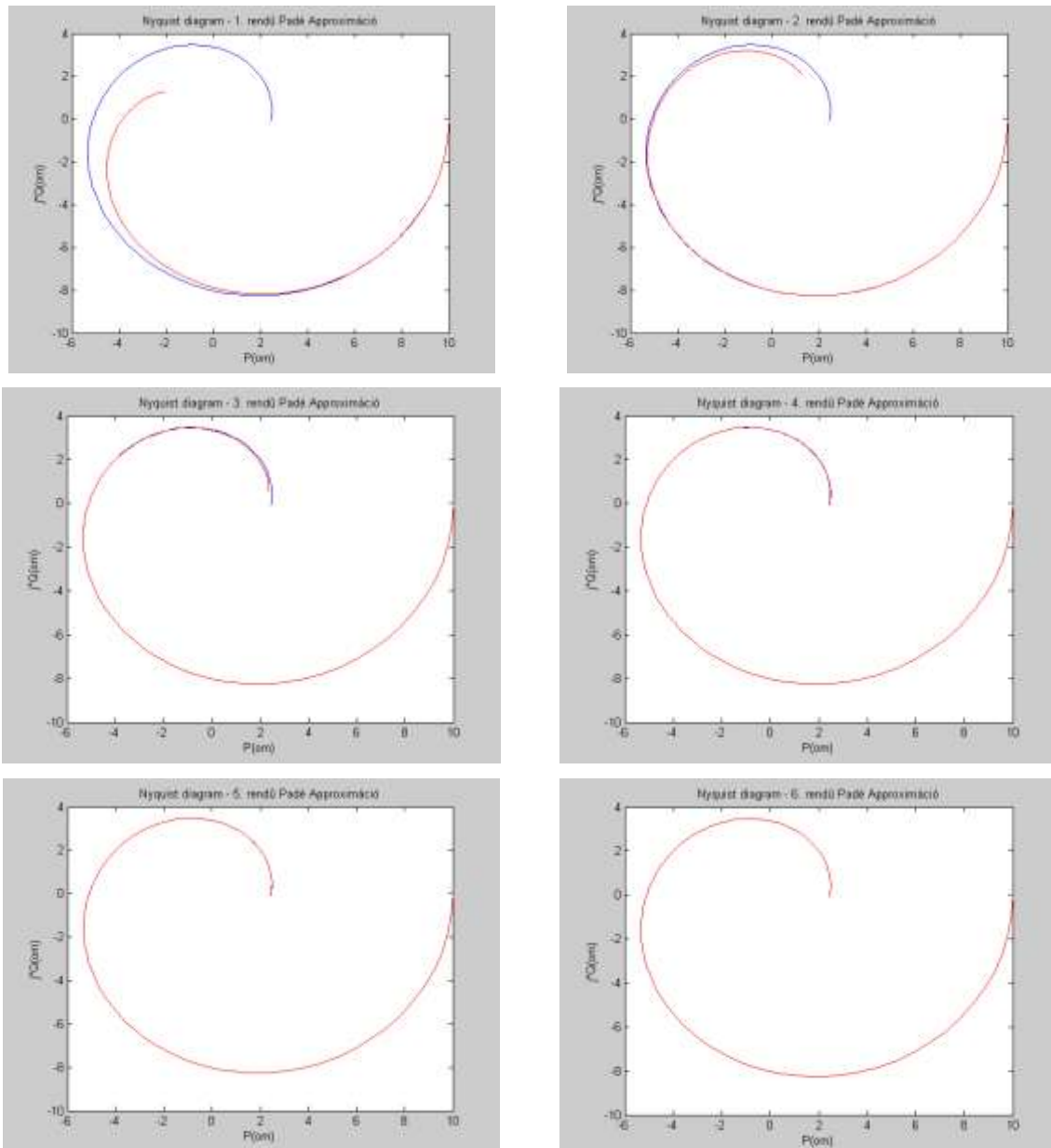
$$Y_p(s) = G(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = \frac{K_p}{1+sT_1} e^{-s\tau} = \frac{10}{1+0,4s} e^{-0,5s} \quad (7.13)$$

A repülőgép-vezető (7.13) egyenlettel megadott PT1H matematikai modelljét a (7.6) alakú  $\hat{G}(j\omega)$  közelítő egyenlettel írjuk le. Határozzuk meg az eredeti holtidős, és a közelítő rendszerdinamikai modellek Nyquist-diagramjait a Padé-approximáció különböző fokszámaira. A számítógépes analízis eredményét az approximáció  $n=(1 \div 6)$  fokszámaira az 1. táblázat tartalmazza.

A Nyquist-diagramok meghatározásához válasszuk a körfrekvenciát a  $\omega = (0 \div 10) \text{ rad/s}$  értékekre. A vizsgált frekvenciatartomány jó közelítéssel reprezentálja a repülőgép-vezető lehetséges periodikus bemeneti jeleit. Az 1. táblázatban bemutatott eredmények alapján könnyen megállapítható, hogy az approximáció fokszámának növelése csökkenti a közelítési hiba nagyságát, amelyeket a 2. táblázatban foglaltuk össze.

A  $G(j\omega)$  és a  $\hat{G}(j\omega)$  frekvenciafüggvények Nyquist diagramjai

1. táblázat



$G(j\omega)$  eredeti Nyquist diagram

$\hat{G}(j\omega)$  közelítő Nyquist diagram

Approximációs hiba.

2. táblázat

Az appoximáció fokszáma	Differenciák	
	$ \Delta P(\omega) $	$ \Delta Q(\omega) $
$n = 1$	4,7642	3,3276
$n = 2$	1,5617	0,4369
$n = 3$	0,2317	0,0297
$n = 4$	0,0204	0,0012
$n = 5$	0,0012	$3,1679 \cdot 10^{-5}$
$n = 6$	$4,5377 \cdot 10^{-5}$	$5,8809 \cdot 10^{-7}$

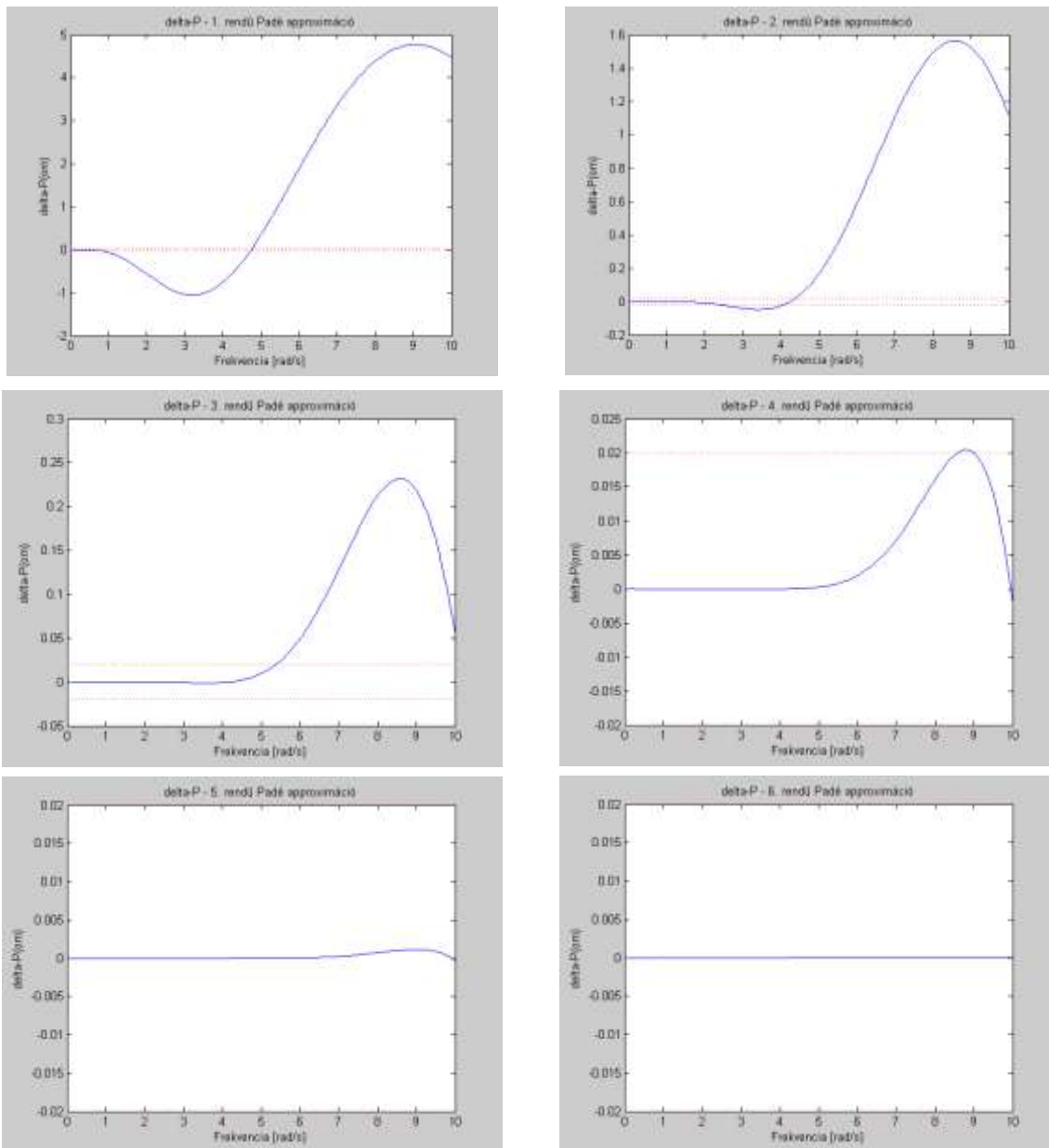
A 2. táblázatból könnyen kiolvasható, hogy  $n=4$  esetén a (7.11)-(7.12) egyenletekkel megadott approximációs hibák jól közelítik a (7.1) kifejezéssel definiált minőségi követelményt, de a Nyquist-függvények valós részeinek eltérése nagyobb, mint az előírt 2 %. Az  $n=5$  fokszámú közelítés esetén a valós rendszer  $G(j\omega)$ , és a közelítő rendszer  $\hat{G}(j\omega)$  Nyquist-függvényeinek úgy a valós, mint a képzetes részeiben értelmezett eltérések kisebb értékűek, mint a (7.1) egyenlettel megadott minőségi követelmény. Az 1. Melléklet felhasználásával az approximáció  $n=5$  esetére a  $\tau = 0,5 s$  holtidő közelítésére tehát az alábbi kifejezést alkalmazzuk:

$$e^{-0,5s} \cong P_d(s) = \frac{1 - \frac{1}{2!}0,5s + \frac{2!}{4!}(0,5s)^2 - \frac{3!}{6!}(0,5s)^3 + \frac{4!}{8!}(0,5s)^4 - \frac{5!}{10!}(0,5s)^5}{1 + \frac{1}{2!}0,5s + \frac{2!}{4!}(0,5s)^2 + \frac{3!}{6!}(0,5s)^3 + \frac{4!}{8!}(0,5s)^4 + \frac{5!}{10!}(0,5s)^5}. \quad (7.14)$$

A (7.11)-(7.12) egyenletekkel megadott hibajelek frekvencia függvényei a 3. és a 4. táblázatban láthatóak.

Az approximációs hiba  $|\Delta P(\omega)| = |P_H(\omega) - P_{köz}(\omega)|$  valós része

3. táblázat



$|\Delta P(j\omega)|$  hibajel diagram

$\delta = 0,02$  minőségi követelmény diagram

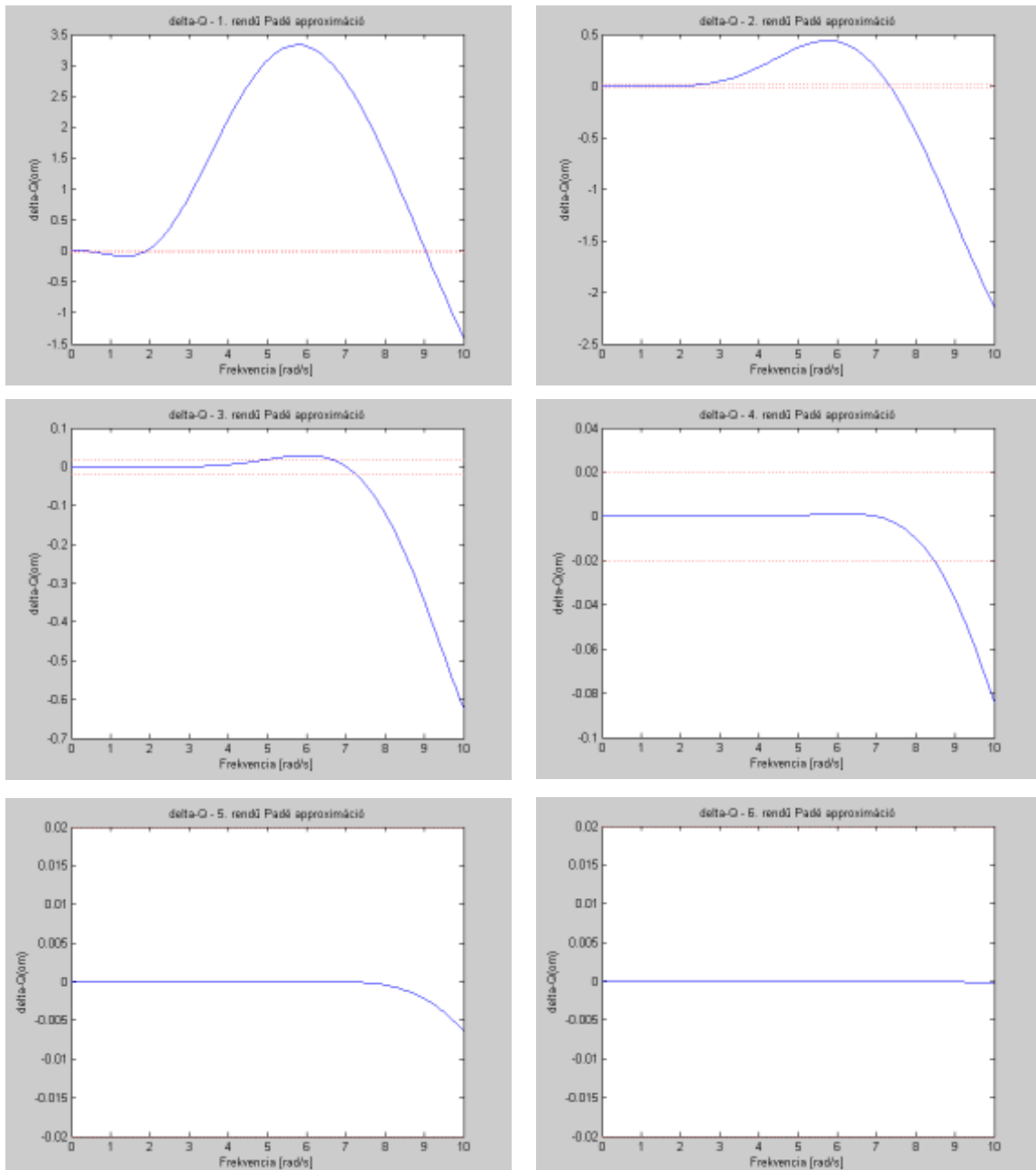


A 3. táblázat alapján megállapítható, hogy az approximáció fokszámának növekedésével csökken a közelítési hiba. Megfigyelhető továbbá, hogy ugyanazon approximáció esetén a vizsgálati frekvencia növekedése a közelítési hiba lényeges növekedését eredményezi.

A 4. táblázat a valós  $G(j\omega)$ , és a  $\hat{G}(j\omega)$  közelítő rendszerdinamikai modell Nyquist-diagramjának képzetes részeit foglalja össze az approximáció különféle fokszámaina. Figyeljük meg, hogy a frekvencia növekedésével, ugyanazon approximációs fokszám mellett, növekszik a közelítési hiba értéke is.

Az approximációs hiba  $|\Delta Q(\omega)| = |Q_H(\omega) - Q_{köz}(\omega)|$  képzetes része

4. táblázat



$|\Delta Q(j\omega)|$  hibajel diagram       $\delta = 0,02$  minőségi követelmény diagram

A 2., 3. és a 4. táblázatokból egyértelműen megállapítható, hogy a (7.11)-(7.12) feltételek egyidejűleg  $n = 5$  esetén teljesülnek, ezért a (7.1) minőségi követelménnyel definiált approximáció minimális fokszáma 5.

## VIII. EREDMÉNYEK, KÖVETKEZTETÉSEK

Ma még számos vezérlési-, illetve szabályozási rendszer nem nélkülözheti az emberi beavatkozást, illetve az emberi tevékenységet. Az ember sokszor ellenőrző-, vagy rendszerfelügyelő szerepet lát el, vagy akár aktívan részt is vehet a szabályozási rendszer irányításában. A szabályozási rendszerek vizsgálata, és előzetes tervezése felveti annak szükségét, hogy az emberi tevékenységet valamilyen dinamikus modellel írjuk le. A repülőgép-vezetők tevékenységének matematikai modellezése fontos úgy a földi-, mint a légi üzemeltetés szempontjából. A pilóta dinamikus modelljének általános alakja függ azon rendszer felépítésétől, amelyben a repülőgép-vezető tevékenykedik, függ a megoldásra váró feladat összetettségétől, függ a képzettségi szinttől, valamint a hajózó fizikai-, és pszichikai állapotától.

A cikkben a szerző bemutatta a repülőgép-vezetők legfontosabb matematikai modelljeit. A szerző rámutatott, hogy az egyes matematikai modellek holtidejének különböző fokszámú approximációja alapvetően befolyásolja a dinamikus rendszerek viselkedését úgy idő-, mint frekvenciatartományban. A szerző levezette a holtidő adott pontosságú, Padé-sorral történő közelítésének alapösszefüggéseit. Bár ez az elméleti módszer is gyakran alkalmazott, és iteratív eljárással könnyen algoritmizálható a megoldása, a szerző egy látványos gyakorlati módszert is bemutatott a Padé-approximáció minimális fokszámának meghatározására. A cikkben a szerző a Nyquist-diagramokat használta a holtidő adott pontosságú modellezéséhez szükséges fokszám megállapítására. Ha a repülőgép-vezető tevékenységét PT1H-modell írja le, és a közelíteni kívánt holtidő  $\tau = 0,5s$ , akkor a  $\delta = 0,02$  pontosságú közelítés eléréséhez  $n = 5$  fokszámú közelítés szükséges. A holtidő pontos közelítő matematikai modellel rendelkezik, viszont nemlineáris lesz a (7.14) kifejezéssel megadott közelítő átviteli függvény.

### FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] McRUER, D. T. – KRENDEL, E. S.: Mathematical Models for Human Pilot Behavior, NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development, AGARDograph AG 188, 1974.
- [2] KORN, G. A. – KORN, T. M.: Matematikai kézikönyv műszakiaknak, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
- [3] McLEAN, D.: Automatic Flight Control Systems, Prentice-Hall International, New York-London-Toronto-Sydney-Tokyo-Singapore, 1990.
- [4] DORF, R. C. – BISHOP, R. H.: Modern Control Systems, Prentice Hall International, Upper Saddle River, New Jersey, 2001.
- [5] LANTOS BÉLA: Irányítási rendszerek elmélete és tervezése, I., Egyváltozós szabályozások, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2001.
- [6] SZABOLCSI RÓBERT: A repülőgép-vezető hagyományos és modern matematikai modellezése a repülőgépek irányítási rendszerében, „Új évszázad, új technológia – Gripenek a magyar Légierőben” tudományos konferencia kiadványa, 2006. április 21., Szolnok (CD-ROM).
- [7] SZABOLCSI RÓBERT: A repülőgép-vezető repülésbiztonság szempontjából kritikus paramétereinek meghatározása, Debreceni Műszaki Közlemények, V. évf., 3. szám, 2006/3, (13-24) o.
- [8] DR. HABIL. SZABOLCSI RÓBERT: A repülőgép-vezető kritikus paramétereinek komplex vizsgálata az oldalirányú irányítási csatornában, Repüléstudományi Közlemények, XVIII. évf., 38. szám, 2006/1, (97-117) o.
- [9] MATLAB<sup>®</sup> 5.2 – The Language of Technical Computing, User's Guide, The MathWorks, Inc., 1997.
- [10] MATLAB<sup>®</sup> 6.5 — The Language of Technical Computing, User's Guide, The MathWorks, Inc., 2002.
- [11] Control System Toolbox 5.1 for Use With MATLAB<sup>®</sup> (Release 12.1), User's Guide, The MathWorks, Inc., 2001.

**1. MELLÉKLET**  
**A Padé-sor együtthatói**

Az approximáció fokszáma	$k$ együttható	$c$ együttható
$n = 1$	$k = 0$	$c_0 = 1$
	$k = 1$	$c_1 = \frac{1}{2}$
$n = 2$	$k = 2$	$c_2 = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}$
$n = 3$	$k = 3$	$c_3 = \frac{3!}{6!} = \frac{1}{120}$
$n = 4$	$k = 4$	$c_4 = \frac{4!}{8!} = \frac{1}{1680}$
$n = 5$	$k = 5$	$c_5 = \frac{5!}{10!} = \frac{1}{30240}$
$n = 6$	$k = 6$	$c_6 = \frac{6!}{12!} = \frac{1}{665280}$
$n = 7$	$k = 7$	$c_7 = \frac{7!}{14!} = \frac{1}{17297280}$
$n = 8$	$k = 8$	$c_8 = \frac{8!}{16!} = \frac{1}{518918400}$
$n = 9$	$k = 9$	$c_9 = \frac{9!}{18!}$
$n = 10$	$k = 10$	$c_{10} = \frac{10!}{20!}$
$n = 11$	$k = 11$	$c_{11} = \frac{11!}{22!}$
$n = 12$	$k = 12$	$c_{12} = \frac{12!}{24!}$
$n = 13$	$k = 13$	$c_{13} = \frac{13!}{26!}$
$n = 14$	$k = 14$	$c_{14} = \frac{14!}{28!}$
$n = 15$	$k = 15$	$c_{15} = \frac{15!}{30!}$
$n = 16$	$k = 16$	$c_{16} = \frac{16!}{32!}$
$n = 17$	$k = 17$	$c_{17} = \frac{17!}{34!}$
$n = 18$	$k = 18$	$c_{18} = \frac{18!}{36!}$
$n = 19$	$k = 19$	$c_{19} = \frac{19!}{38!}$
$n = 20$	$k = 20$	$c_{20} = \frac{20!}{40!}$