

KULMAN KATALIN<sup>1</sup> – DANCS GÁBOR<sup>2</sup> – PINTÉR MARIANNA<sup>3</sup>**Ismert geometriai feladatok digitális köntösben**

*Az alsó tagozatos matematikaórákon is figyelembe kell vennünk az új generációkhoz tartozó kisiskolások digitális igényeit, ezért az oktatásba egyre nagyobb arányban szükséges bevonnunk a digitális eszközöket, kész digitális tananyagokat. A legtöbb esetben azt láthatjuk, hogy régi, ismert feladatok digitális változatai készültek el, ami érthető, hiszen ezeknek a feladatoknak a hasznáról, pedagógiai céljairól, tanításának módjáról az évek alatt komoly tapasztalatokat szereztek a pedagógusok, így nem kell teljesen ismeretlen terepen járniuk. Felmerül azonban a kérdés: a feladat digitalizálásával nem változik-e meg a feladat pedagógiai szerepe, nem változik-e tartalma, nem módosul-e fejlesztési fókusz, vagy egyenesen matematikai tartalma. Vizsgálódásunk középpontjában alsó tagozatos geometriai feladatok és a megoldásukhoz szükséges hagyományos, illetve digitális eszközök állnak.*

**Bevezetés**

A digitális eszközök szerepe korunk iskoláiban növekvő tendenciát mutat (Cox és Marshall, 2007). Használatukat igényli a fiatal, digitális bennszülött, az alfa generáció; számukra az élet elképzelhetetlen számítógépek, okoseszközök nélkül (Fernandez-Cruz és Fernandez-Diaz, 2016). Az IT eszközök felhasználási lehetőségei számosak, lehet velük játszani, ismerkedni, kapcsolatokat fenntartani, mesét vagy filmeket nézni, zenét hallgatni, információkat szerezni és átadni; vég nélkül sorolhatnánk, hányféleképpen függ az életük ezektől az eszközöktől. A gyermek minden tevékenységével tanul, így minden applikáció és játék is tanít valamit. A legtöbb esetben nem teljesen világos, hogy mit, ahogyan az sem, hogy hasznos vagy értékes-e ez a tudás. Azonban a tanulás ilyen spontán lehetőségeit tudatosan ki kell használnunk. Lehetséges olyan digitális tartalmak előállítása, amelyek nyíltan vagy rejtett módon, de célzott ismeretek, készségek elsajátításában vagy gyakorlásában segítik a gyermekeket.

A digitális környezetben felnövő generációknak már az alsó tagozaton is megvan az igényük arra, hogy használhassák eszközeiket (Pintér, 2016). Ha vannak megfelelő digitális

<sup>1</sup> tanársegéd, Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar Matematika Tanszék; kulman.katalin@tok.elte.hu

<sup>2</sup> tanársegéd, Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar Matematika Tanszék; dancs.gabor@tok.elte.hu

<sup>3</sup> tanársegéd, Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar Matematika Tanszék; pinterm@ceasar.elte.hu

tananyagaink, és pontosan tudjuk, hogy az egyes anyagok mire használhatók, akkor a tanítási órák a gyerekek elvárásaihoz igazodva motiválóbba, hatékonyabbá tehetők az okoseszközök alkalmazásával.

Az elmúlt években több – jó és kevésbé jó – kísérletet láthattunk digitális tananyagok, feladatbankok készítésére. Ha a gyakorló tanár szemével nézzük át az elkészült feladatokat (e cikk szerzői maguk is részt vettek digitális feladatbankok létrehozásában, emellett közoktatási intézmények pedagógusai és az ELTE Tanító- és Óvóképző Karának oktatói), azt tapasztalhatjuk, hogy nem sok esetben készültek valóban új, az eszközök lehetőségeit kihasználó anyagok. Sokkal inkább a korábban hagyományos eszközökkel megismert feladatok digitális változataival találkozunk.

Az, hogy legtöbbször régi, ismert feladatokat „digitalizálunk”, nem meglepő. A készítők, akik jó esetben maguk is pedagógusok, ismerik ezeknek a „jól bejáratott” feladatoknak a használati módját, a tanítás-tanulás folyamatában elfoglalt helyét és szerepét, ismerik a feladatok erősségeit, gyengeségeit; megfelelő helyen és módon alkalmazni tudják őket a tanórákon, így joggal remélik, hogy a digitális változat elkészítése és alkalmazása csak a digitális feladatoktól elvárt többletet nyújtja majd a hagyományos megvalósításhoz képest. Szerepet játszik ebben az is, hogy valóban új feladatot kitalálni nehéz, és gyakran feleslegesnek is tűnik, továbbá sok esetben a feladatok kitalálói maguk sem ismerik eléggé azokat az eszközöket, amelyekre fejlesztenek. Ennek következménye az, hogy gyakran magának a digitális platformnak a lehetőségei nincsenek kihasználva, hiszen az elkészített feladatok eredendően nem arra lettek kitalálva. Egy másik probléma, hogy a digitalizálás során az elkészült feladatok matematikadidaktikai tartalma, tantárgy-pedagógiai céljai megváltozhatnak, de ritkán foglalkozunk vele, hogy pontosan milyen téren és mértékben.

Gondolatébresztőnek a geometriai tevékenységek közül a konstruálásokkal foglalkozó digitális feladatokat tekintettük át, és mutatunk be közülük néhányat. A feladatok hagyományos és digitális változatának tartalmát hasonlítjuk össze, a tantárgy-pedagógia néhány szempontját is figyelembe véve.

### **Geometriai tevékenységek**

A Nemzeti Alaptantervben megfogalmazott, a matematikatanulás által fejleszthető kompetenciák mindegyike kivétel nélkül formálható geometriai tevékenységek segítségével. A Varga Tamás-féle Komplex Matematikatanítási Kísérlet elképzeléseire, eredményeire és tapasztalataira épülő, Karunkon preferált tantárgy-pedagógia szerint az alsó tagozaton a

geometriát is elsősorban a gyermek öntevékenységből származó tapasztalataira építve tanulja a gyermek. Ezeket a tevékenységeket tartalmuk szerint négy témakörbe soroljuk: konstrukciók, transzformációk, mérések és tájékozódás. Ezek közül most az alkotásokkal foglalkozó tananyagokat vizsgáltuk. A közoktatás keretein belül jó esetben már óvodáskorban végez a kisgyermek alkotási tevékenységeket. Tornyokat épít építőjátékokból, amelyeket aztán lebont, formákat rajzol, színez és fest, nyír, vág és hajtogat. Miközben alkot, ismerkedik a formákkal és az eszközökkel, azok matematikai szempontból is releváns tulajdonságaival, ezáltal a matematikai tartalom alapozása, felfedezése már formális módon is zajlik. Alsó tagozaton a konstruálások tovább folytatódnak, és e tevékenységek a geometriai tulajdonságok és geometriai viszonyok, kapcsolatok megtapasztalására, valamint a geometriai alakzatok megismerésére vezetnek (C. Neményi, 2014).

A későbbi geometriatanítással ellentétben alsó tagozaton a térgeometriai tapasztalatszerzés a tananyagban is megelőzi a síkbelit, mivel a valóság tárgyai is háromdimenziósak. A konkrét, valóságos tárgyakkal végzett tevékenységekkel szerzett tapasztalatokra építve folyamatosan, fokozatosan valósul meg a geometriai fogalmak absztrakciója, amelynek során a matematikai szempontból lényegtelen (vagy éppen kevésbé lényeges) fogalmi alkotóelemek elhagyásával haladunk térben a tömör testekből kiindulva, a síklapokból épített testeken és testhálókön át az élvázakig; síkban a tömör síkidomoktól a körvonalakig. Ezt az absztrakciós utat követik eszközeink is. A gyermekek a testek térbeliségét akkor érzékelik legjobban, ha első alkotásaiknál testes építőelemeket tudnak felhasználni az építéshez, majd a későbbiek során síklapokból állítanak össze testfelületet, testhálóból hajtanak testeket, és csak ezután következik az építéseknek az a mozzanata, amikor (például Babylon építőjáték használatával) élváz-építőkből alkotják meg az élek és csúcsok rendszerét. A síkbeli alkotások sorrendjében is ezt a szemléletet követjük. Először síklapokat készítenek, majd ezekből – a belsejükkel együtt – más alakzatokat, festéssel, parkettaminták kirakásával tapasztalják meg a síkidomok tulajdonságait. Ezután következhet a határvonal alkotásával – szöges táblán, majd rajzolva – létrehozott síkidom. A konstruálások bármilyen fokozatánál is tartunk éppen, kipróbált és jól bevált hagyományos eszközök széles skálájából tudunk válogatni.

A digitális eszközök használata az oktatásban ma már megkerülhetetlen, és már nem engedhetjük meg magunknak, hogy a gyermek által ismert, használt, birtokolt eszközöket a tanórán ne használjuk, vagy tiltsuk. Bár az eszközök hasznosságát minden szituációban egyesével kell megítélnünk, mégis az előnyök – többek között az azonnali és anonim

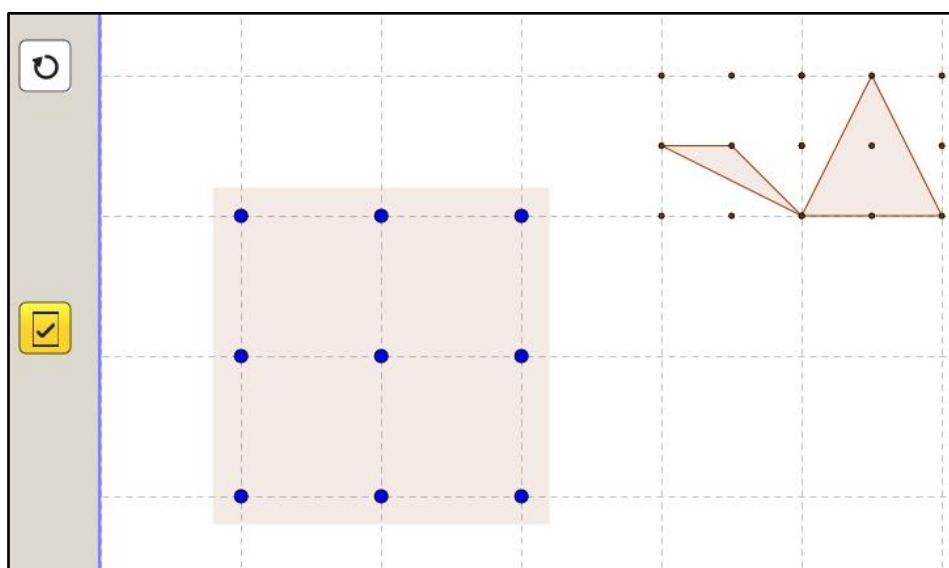
visszajelzés lehetősége, az erős vizualitás, az interaktivitás, a differenciálási, motivációs lehetőségek – sok esetben meghaladják a hátrányokat (Reynolds et al., 2003; Dancs, 2014).

### Geometriai feladatok hagyományos és IT eszközzel megoldva

A következő feladatok a GEOMATECH Projekt (2015) digitális tananyagainak feladatai, melyek szabadon hozzáférhetők és felhasználhatók. Olyan, hagyományos eszközökkel is megvalósítható feladatokat válogattunk ki, amelyek elfogadottak, kipróbáltak, felhasználási módjuk, didaktikai céljaik, tartalmuk ismertek és jól meghatározottak.

#### *Háromszögek alkotása pontrácson (1. ábra)*

Ebben a konstrukciós feladatban egy kilenc pontból álló négyzetrácson kell létrehozni úgy háromszögeket, hogy azok ne legyenek egymással egybevágók. A háromszögeket határvonalak segítségével hozzák létre a gyerekek.



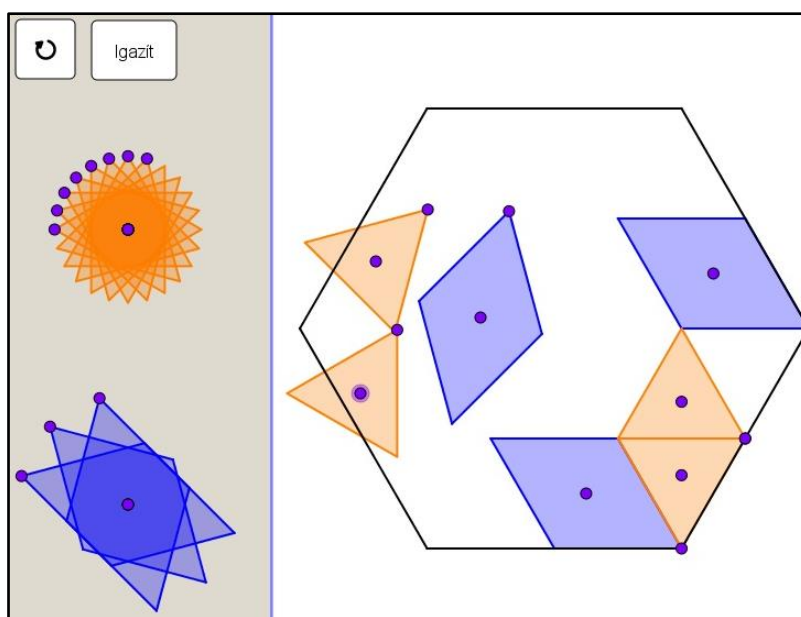
**1. ábra. Háromszögek alkotása pontrácson**

A geometria témakörén belül nemcsak a síkbeli alkotás a feladat célja, hanem a terület- és kerületszámításhoz szükséges ismeretek bemutatása, alapozása, a háromszögek tulajdonságainak megfigyelése, rész-egész kapcsolat megfigyelése, hasonlóság és egybevágóság fogalmának helyes értelmezése, szimmetriák megfigyelése. Hasznos segítséget nyújthat a kombinatorikus gondolkodás fejlesztéséhez, illetve a számfogalom alakításához kapcsolódóan a racionális számok tapasztalati úton történő megismerésének tevékenységéhez is.

A hagyományos eszköz ennél a feladatnál lehet a négyzetrácsos füzet, de sokkal érdekesebb, izgalmasabb a gyerekek számára a szöges tábla használata. Természetesen a két változat nem teljesen egyenértékű; a digitális változat a szöges táblát szimulálja, a csúcspontok kijelölésével alkotja a háromszögeket. A hagyományos eszköz kézzelfoghatósága miatt szabadon mozgatható, forgatható, ilyen módon sokszor könnyebben, egyszerűbben ellenőrizhető, megtapasztalható két alkotás egybevágósága. A digitális tananyag erre, és a hibák vizsgálatára sem ad lehetőséget, ilyen módon fontos tapasztalatoktól fosztja meg a gyermeket. Ráadásul a javítás, próbálgatás lehetőségei is nehézkesek. Előnye viszont, hogy gyűjti és egyszerre jeleníti meg a megtalált megoldásokat, ezek azonban megalkotásukkor azonnal megjelenítésre kerülnek, a gyermeknek nem kell megítélnie jóságát. Összességében azonban úgy gondoljuk, hogy itt a hagyományos és digitális változatok között nincsen jelentős különbség, így a digitalizálás, matematikai szempontból, előnnyel nem jár.

### *Mozaikkirakó (2. ábra)*

Ez egy Tangram típusú játék, melyben előre megadott síkidomokkal kell átfedés- és hézagmentesen lefedni egy megadott alakzatot. A feladat nehézsége kiválóan skálázható, segíthet, hogy a kirakókészletben pontosan azok az elemek szerepelnek, amelyek szükségesek, illetve szükség esetén megjeleníthetjük a kirakás módját is. A feladat teljes síkidomokkal dolgozik, melyekből szintén teljes – belsejével együtt megjelenő – síkidomot kell kirakni.



**2. ábra. Mozaikkirakó**

A feladat által fejleszthető geometriai ismeretek többek között a síkidomok tulajdonságainak megismerése, a területegyenlőség megfigyelése átdarabolás segítségével, a szögek nagyságának megtapasztalása, a különböző egybevágósági transzformációk és a szimmetria felfedeztetése, a rész-egész viszony és az illesztés szabályainak megismerése.

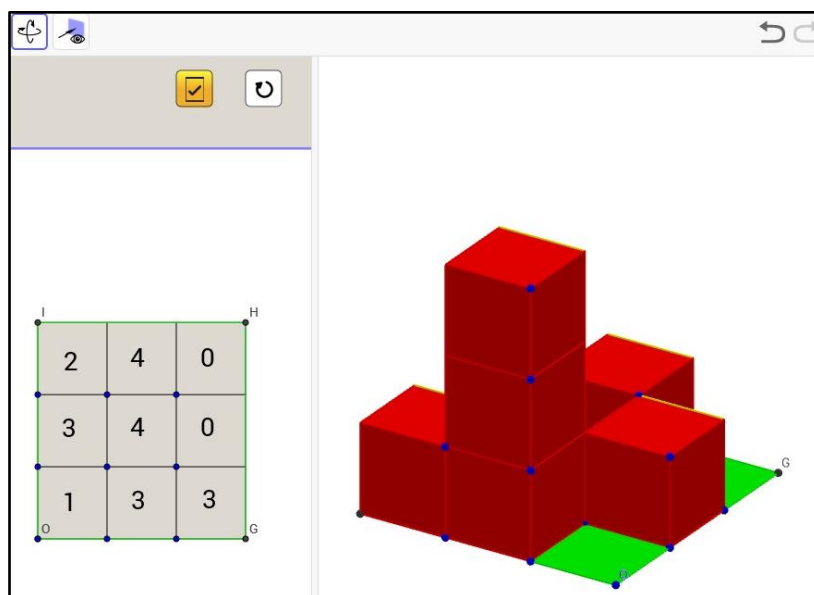
A feladat hagyományos eszközei lehetnek a keménypapírból kivágott síkidomok, vagy a tér- és síkmértani modellezőkészlet megfelelő lapjai. A gyerekek a tevékenység során megtapasztalhatják a síkidomok formáit, szögeit, nagyságát, illeszthetőségüket és a parkettázás szabályát, miszerint hézag- és átfedés-mentesen szabad lerakni az egyes lapokat. A síkidomok taktilis érzékelése során azokat tudják forgatni, egyenes körüli forgatás útján tengelyesen tükrözni. A digitális tananyag súlyos korlátozása, hogy a síklapokat nem lehet átfordítani, így csak a mozgások (pont körüli forgatás és eltolás) az alkalmazható geometriai transzformációk. Ezen kívül komoly probléma, hogy a digitális feladat csak körülményesen használható, igen nehéz a pontos illesztés, továbbá, hogy az automata illesztő funkciók a finommozgásokat feleslegessé teszik.

Összességében a digitális feladatnak inkább a hátrányai jelentősek, használatának nehézsége elvonja a figyelmet az ismeretekről, a korlátozások lehetetlenné teszik a szabad kísérletezést, így használatának célja legfeljebb a gyakorlás lehet, a megértést semmiképpen sem segíti.

### *Kódolt alaprajz (3. ábra)*

Ebben a tevékenységben építőkockákból kell egy testet készíteni úgy, hogy az illeszkedjen egy előre megadott alaprajzra, és a megfelelő részeken a kóddal megadott magasságú legyen. Ilyen módon a gyermekek testeket hoznak létre testes építőelemekből egy speciálisan megadott síkbeli reprezentáció alapján.

A hagyományos eszköz használatával megismerkednek a gyerekek a kocka formájával és azok egymásra építhetőségével, statikai tulajdonságaival. Egy feladatlapon kiadott alaprajz és az építmény felépítése lehet az egyik feladat, illetve ennek a fordítottját is megoldhatják, mikor az építményt megfigyelve kell alaprajzot kódolniuk. Mindkét változatnak elkészült a digitális megfelelője.



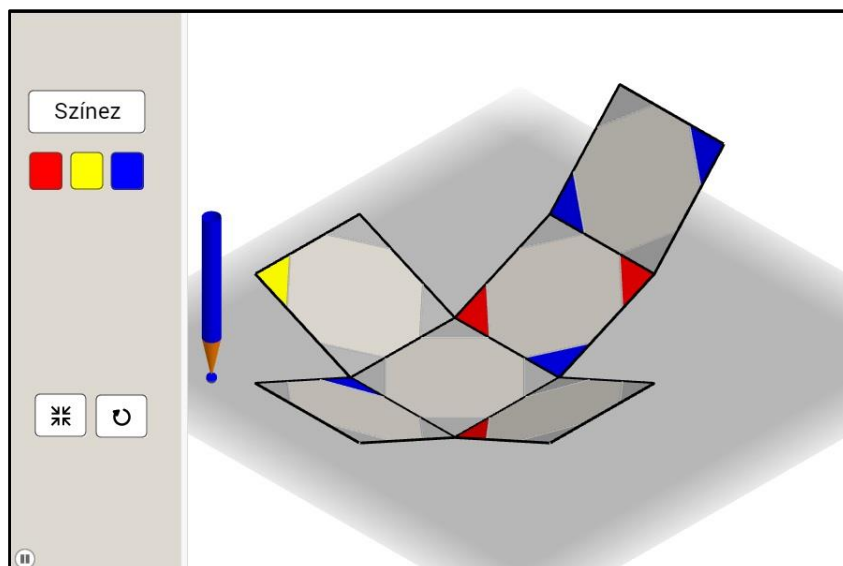
**3. ábra. Kódolt alaprajz**

A feladat segítségével nemcsak a geometriai ismeretek bővíthetők – nézetek, vetületek, testek megismerése, megfigyelése –, hanem a számfogalom fejlesztésében, a számok rendezésében és a számlálásban is a gyerekek hasznára válhat.

A legfontosabb eltérés a valóságos és digitális építkezés között, hogy utóbbi egy új, a feladat szempontjából felesleges, a gyermek számára nehéz absztrakciós szintlépést igényel. A digitális feladatban ugyanis a térbeli tömör test axonometrikus reprezentációja jelenik meg. Ennek a lépésnek a közbeékelésével a feladat helye megváltozik az absztrakció folyamatában, ilyen módon pedagógiai céljai is módosulnak. A digitális és hagyományos feladat bár hasonló, mégsem használhatóak egymás megfelelőjeként.

#### *Kocka hálójának színezése (4. ábra)*

E tevékenység folyamán a kocka egy kiterített testhálóján azonos színnel kell beszínezni azokat a négyzetlapcsúcsokat, amelyek – miután összehajtottuk a testhálót kockává – egy csúcsban találkoznak. A megoldás során a térbeli építéseknek a második fokozatát hajtják végre a gyerekek: határoló síklapok segítségével hoznak létre testet.



**4. ábra. Kocka hálójának színezése**

A feladat célja a kocka testhálójának és a tulajdonságainak megismerése, a geometriai transzformációk, mozgások, megfigyelése és a térlátás fejlesztése.

A hagyományos eszköz ebben az esetben a pedagógus (vagy a gyermek) által tanulónként és feladatonként elkészített testháló, amelyet ráadásul egyesével előre kell színezni. Ez a gyakorlatban akár százas nagyságrendű testháló elkészítését is igényelheti. A rosszul színezett hálók nem, vagy csak nehezen javíthatóak, a háló egyben tartása nehéz az illesztő elemek nélkül, amelyek viszont gyakran hibás testháló-fogalmat eredményeznek.

A digitális tananyag a pontos testháló-fogalom megtapasztalását teszi lehetővé, egy kattintásra összeáll a testháló kockává, ragasztás nélkül. A feladatgyártás nem jár a pedagógus számára többletmunkával, többletidővel. Szabadon változtatható nemcsak a színezés, hanem a kocka testhálója is. Elmondható, hogy ebben az esetben a digitális tananyag is, és a hagyományos eszköz is ugyanazt a matematikai tartalmat és tantárgy-pedagógiai célt szolgálja, de a digitális változat egyszerűbben, rugalmasabban használható, miközben tisztább fogalmi megtapasztalást tesz lehetővé, és többlettartalmakkal is bír a hagyományos változathoz képest. A valódi hajtogatás kevésszeri megtapasztalása után a digitális feladat használata célszerűbb, mert látványosabb, több feladat áll rendelkezésünkre, és segíti a differenciálást.

## Összegzés

A kiragadott négy feladattal szeretnénk volna megmutatni, hogy az alsó tagozatos geometriai konstruálások során a digitális feladatok matematikai tartalma és tantárgy-pedagógiai céljai különbözőképpen változhatnak a hagyományos eszközökkel való megoldásához képest.



Mutattunk példát arra – háromszögek alkotása pontrácson –, hogy a hagyományos és a digitális eszközök használata közti választásnak nincs különösebb jelentősége matematika-tartalmi és tantárgy-pedagógiai szempontból. Mutattunk példát olyan esetre – mozaikkirakó –, ahol a matematikai tartalom megértését nem segíti, sőt akadályozza a digitális tananyag. A kódolt alaprajz-feladat olyan példát mutat, amikor a digitális változat matematikai tartalma és tantárgy-pedagógiai célja lényegesen eltér attól a hagyományos feladattól, amely alapján készült. Ebben az esetben a hagyományos és digitális változat nem cserélhető fel egymással, az óra céljai és feladatai alapján kell eldöntenünk, melyiket alkalmazzuk. Utolsó példánk pedig olyan eset, ahol a digitalizálás során az oktatási tartalom és cél nem változik jelentősen, de a digitális változat használata indokolt, és számtalan előnnyel jár. Hangsúlyozni szeretnénk azonban, hogy a kocka hálójának hajtogatással történő megtapasztalása fontos előkészítése a digitalizált feladat használatának, ez a lépés a folyamatból semmiképpen nem hagyható ki!

Általában elmondható, hogy az alsó tagozaton nem mondhatunk le a hagyományos eszközök használatáról. Egy olyan tanórán, amelynek domináns didaktikai célja az új ismeret közlése, célszerű először ezeket alkalmazni, mivel az absztrakció útján korábbi helyen állnak. A gyakorló fázisban azonban lehetséges és gyakran célszerű a digitális változatot alkalmazni, mivel a feladatok számtalan variációs lehetőséggel és nehézségi skálázhatósággal rendelkeznek.

Ezzel a kevés, önkényesen kiemelt példával szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy egy alsó tagozatos geometriaórán a hagyományos eszközökkel történő játékos tevékenység, a tapasztalás, a megismerés révén sok esetben jobban biztosítja az induktív fogalomtanulás segítségével, a matematikai tartalom elsajátítását, mint ugyanezeknek a feladatoknak és eszközöknek a digitális változatai. Az alsó tagozatos gyerekek kíváncsiak, érdeklődőek és motiváltak az analóg eszközökkel végzett feladatmegoldásokban is. Ugyanakkor az ismeret begyakorlása során sok esetben a digitális tananyagok használata által egyszerűsödik a pedagógusok munkája, könnyebbé teszi a differenciálást, és a gyerekek motivációját is fenntartja a változatosságával. A választás során ügyelnünk kell arra, hogy a feladatokat ne kritika nélkül helyettesítsük digitális változatukkal, gondoljuk végig, hogy a feladat tartalma, célja megváltozott-e a digitalizálás folyamán, jár-e a digitális változat használata előnnyel, illetve hogy nem hátrányos-e a használata. Ennek mérlegelése – mivel a feladatbankokban nem sok ilyen irányú utalást találunk – az alkalmazó pedagógus felelőssége.

**BIBLIOGRÁFIA**

- C. Neményi, E. (2014). *Geometria tananyag és a geometria tanulása az alsó tagozaton*, Budapest: ELTE Eötvös Kiadó Kft.
- Cox, M.J. – Marshall, G. (2007). Effects of ICT. *Education and Information Technologies*, vol.12. issue 2. pp. 59–70. doi: [10.1007/s10639-007-9032-x](https://doi.org/10.1007/s10639-007-9032-x)
- Dancs, G. (2014). A régi és az új találkozása az iskolában, in: Szitányi J. (Ed.) *Fókuszban a tanuló: Tanulmányok Szendrei Julianna emlékére*, (pp. 21–31). Budapest: ELTE
- Fernandez-Cruz, – F. J., Fernandez-Díaz, J. (2016). Generation Z’s Teachers and their Digital Skills. *Comunicar Media Education Journal*, köt. 24, kiad.46. pp. 97–105. doi: [10.3916/c46-2016-10](https://doi.org/10.3916/c46-2016-10)
- Pintér, M. (2016). Milyen tapasztalatokkal kerül az alfa-generáció az iskolába? *Új Köznevelés* vol.8. p. 27.
- Reynolds, D. – Trehane, D. – Tripp, H (2003). ICT – the hopes and the reality. *British Journal of Educational Technology*, vol. 34. issue. 2. pp. 151–167. doi: [10.1111/1467-8535.00317](https://doi.org/10.1111/1467-8535.00317)
- Budapest Metropolitan Egyetem, BKF Kommunikációs Alapítvány, GeoGebra Nonprofit Kft. (2015) *GEOMATECH Projekt (TÁMOP-3.1.12-12/1-2013-001)*
- <https://geomatech-beta.geogebra.org/material/simple/id/508687#material/763563>
- <https://geomatech-beta.geogebra.org/material/simple/id/508751#material/969199>
- <https://geomatech-beta.geogebra.org/material/simple/id/509215#material/704591>
- <https://geomatech-beta.geogebra.org/material/simple/id/508799#material/1418073>

*KULMAN, KATALIN – DANCS, GÁBOR – PINTÉR, MARIANN*  
WELL-KNOWN GEOMETRY PROBLEMS IN DIGITAL DISGUISE

*Considering the digital needs of the young generations, we have to involve IT technologies and educational applications in primary education on a much larger scale. Most educational materials made by teachers are simple digitalization of established mathematical problems. This is understandable, teachers have accumulated a lot of experience over the years about these well-known problems, they know their benefits, pedagogical goal, the way of their usage etc. so they do not have to walk a completely untrodden path. But while the digital versions of these problems may appear the same, there are some unanswered questions emerging from a didactical point of view: does digitalization change the pedagogical goal of the problem? Does it change its development focus, its mathematical content? In this paper we compare the digital and the traditional implementation of four primary school geometric construction problems.*