

# MEGLEPETÉSEK A MAXWELL-EGYENLETEK TÉMAKÖRÉBEN

Abonyi Iván  
Eötvös Egyetem

*E dolgozat eredete egy előadás az ELTE Doktori Iskola-ján 2014 decemberében. Az Iskola irányítója, Tél Tamás professzor felkért, hogy a beteg Nagy Károly akademikust, előadássorozata megszakítását elkerülendő, helyettesítem. Örömmel készültem a segítségre, de előbb telefonon beszéltem Nagy Károllyal, hogy miről is legyen szó az előadáson. Vele egyeztem meg erről a témáról. Most, hogy elhunyt, legyen szabad Neki ajánlanom ezt az írást. Az Ő emlékének, aki 1952, másodéves egyetemi hallgató korom – az elméleti mechanika vizsgám – óta kitüntetett bizalmával, barátságával. Azt gondolom, Őt is érdekelné ez a téma, hiszen elfogadta elgondolásomat.*

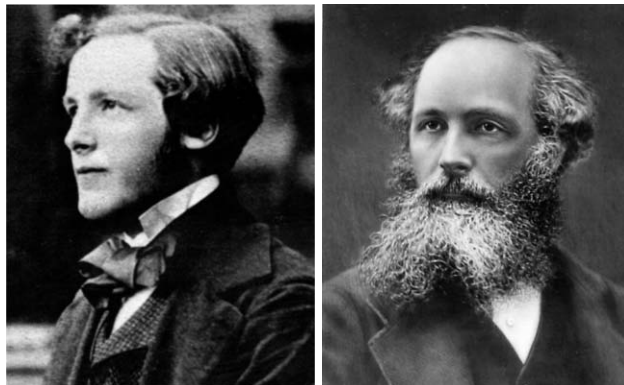
*Emlékét megőrizzük. Nyugodjék békében!*

## Útban az elektrodinamika szintézise felé – történelmi visszapillantás

A fizika története arról tanúskodik, hogy bizony hosszú út vezetett az elektrodinamika átfogó szintézisének megalkotásáig, a Maxwell-elmélet felismeréséig. Az is megállapítható, hogy a Maxwell-egyenletek elfogadásában két fronton is folyt a harc. Egyfelől a közvetlen sikerek útján, amelyek a dinamikus folyamatok felismerésével jutottak egyre inkább előre. Ide tartozik az áramok mágneses terének felismerése (*Ampère*), a mágneses indukció jelentős kapcsolatteremtő leleplezése (*Faraday*), a dinámóhatás feltárása (*Jedlik*, *Siemens*) és ezáltal a mozgás és az indukció jelentős kapcsolatának kiderítése, a transzformátor-elv felfedezése, de elmehetünk az elektromágneses sugárzás felismeréséig is. Az említett jelenségek körök – tehát nem csak az „áramkörü” viszonyokban, hanem a sugárzási vonatkozásokban is – sorsdöntő és bizalomkeltő tulajdonsága volt, hogy az elektrodinamikát valami „istenadta” új világ ipari megváltójaként azonnal a gyakorlati életben alkalmazni lehetett. Sorba gyűltak a villanylámpák a világ utcáin, épültek a távbeszélő központok, indultak a villamosok (Budapestben a „földalatti”), épültek a villamoserőművek, az elektromos energiát szállító távvezetékek. – Másfelől azonban az elvi háttér közel sem volt világos, eleinte



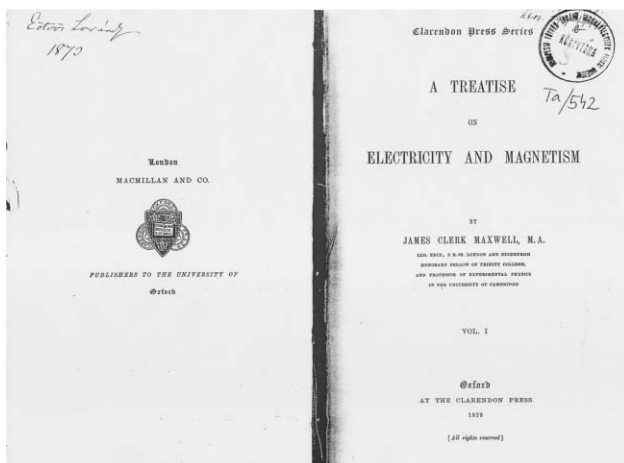
*Abonyi Iván az Eötvös Egyetem Elméleti Fizikai Tanszék nyugalmazott tudományos főmunkatársa, száznál több szakmai és ismeretterjesztő írás szerzője. 1975 és 1982 között az ő irányításával készültek a Gondolat Könyvkiadó *Fizika évkönyv* sorozatának kötetei. A magyar *Larousse Lexikon* és a *Magyar Nagylexikon* sok szócikkének ő a szerzője. Két tanulmánykötete jelent meg a 17–18. század, illetve a 20. század fizikájáról.*



1. ábra. James Clerk Maxwell, az ígéretes zseni ifjú korában és az érett korú kutató.

még könnyen áttekinthető sem. Nem volt világosan áttekinthető *Maxwell* csodálatos alkotása (1873), a „Maxwell-egyenletek” világa. Ennek méltó illusztrációja lehet *Eötvös Loránd* „kalandja”. Eötvös 1873-ban Angliában járt, ekkor jelent meg James Clerk Maxwell (1831–1879) (1. ábra) skót fizikus *Treatise on Electricity and Magnetism* című nagy műve [1] az elektrodinamikai szintézis kimunkálásáról. Eötvös természetesen megvette a művet, nevét beírta a könyvbe (2. ábra), minden valószínűség szerint jól meg is nézte, de mert meglehetősen elfárasztotta a sok matematikai komplikáció Eötvöst (aki pedig igen csak jártas a matematikában), minden bizonnyal megelégedett azzal, hogy becsukta a könyvet és tovább folytatta kutatásait a gravitációval és a vele kapcsolatos elektromos jelenségekkel (!) kapcsolatban. Tudomásunk szerint nem hivatkozott Maxwellre! Ezt az „unreadable” könyvet az tette „olvashatatlaná”, hogy abban az időben éppen csak születőben volt – de még nem született meg a vektorok, a vektor-vektor, vektor-skalár és skalár-vektor függvények formailag is áttekinthető, köny-

2. ábra. Maxwell korszakalkotó művének címlapja és ami különösen érdekes, a könyvet megvásárló Eötvös szignója.



nyen kezelhető, mégis tömör tárgyalásmódja, a vektoralgebra és a vektoranalízis.

Maxwell korai halála után az angol *Oliver Heaviside* (1850–1925) (3. ábra) ismerte fel az új matematikai formalizmus szerepét és alkalmazta a Maxwell-egyenletekre. Hangsúlyozzuk, Heaviside óriási érdeme a Maxwell-egyenletek – általunk is használt – vektoralakjának felismerése, feldolgozása, ami végül is nem kicsinylendő le (mert itt nemcsak a vektor-vektor függvény, hanem a hely ez idő szerinti deriváltak alkalmazása is fontos szerepet játszik).

A fizikai szakirodalomban gombamódra szaporodni kezdtek az összefoglaló, elsősorban a „műszaki igényeket” kielégítő, célratörő munkák.

Olyan nagy nevek is szerepelnek a tankönyveket író „atyák” között, mint a francia *Henri Poincaré* (1854–1912) és a német *Hermann von Helmholtz* (1821–1894), hogy egyelőre csak őket említsük.

A magyar szakirodalom is büszkélkedhet e témakörben megjelent munkával [2]. Távolról sem szeretnénk kritizálni vagy éppen lebecsülni a szerzők tankönyvírói alaposágát, de az a véleményünk, hogy az elektrodinamika alapjairól értekezni eleinte túl rágós falat lehetett. Az ismert és ma még könnyen fellelhető tankönyvek közül egy sem foglalkozott igazán az elektrodinamika valódi alapkérdéseivel, annyira elégedettek voltak az általuk meghódított matematikai ismeretek alkalmazásainak a bemutatásával. Az elektrodinamika-tankönyvek mindegyike legfőbb feladatának azt az immár szokásossá vált célt tartotta, hogy az elektrodinamika körülbelül 1900-as állapotát, és az arra alapuló modern technikai vonatkozásokat mutassa be. Hiszen a relativitáselmélet bemutatása már más tanrendi tétel lett.

Ezért azt hisszük, jelen írásunk mégis érdekes lehet az Olvasók számára.

Azzal kezdjük, hogy az irodalomjegyzékében felsoroljuk az elektrodinamika jellegzetes magyar műveit [3], de a teljességre törekedni sajnos nem áll módunkban, ezért a kimaradottaktól elnézést kérünk.

S most beszámolunk részben saját kutatásunk szerény eredményéről, de követjük az összefoglaló előadás menetét.

E szerint *Max Planck* (1858–1947) (4. ábra) volt az igazán szerencsés a többször is megjelent elméleti fizikai tankönyvsorozatával. Őt az tünteti



3. ábra. Oliver Heaviside



4. ábra. Max Planck

ki a tankönyvíró kollégái közül, hogy nem csak az elektrodinamikai eredmények széleskörű alkalmazásait követte, hanem a Maxwell-elmélet kiépítését is fontos közlendőnek tartotta. Abban hitt, hogy a Maxwell-egyenletek (főleg később Heaviside megfogalmazása szerinti) alakja a tényleges fizikai valóságot írják le a matematika nyelvén. A leíró függvények nem csak esetleges nyelvi kényszerképzetek, hanem a fizikai valóságot írják le, jelentésük mérhető, a leírás leképezi az elektrodinamikai valóságot, az elektrodinamika anyagi valóságát. Ennek egyik pillérét az elektrodinamikai energiatételben szerepet játszó Poynting-vektorban látta. A Poynting-vektor – mint ismeretes – az elektromágneses erőterben áramló energiát, a térenergiát írja le. Ennek nyomán Planck azt remélte, ha az elektromágneses erőternek energiája és energiaáram-vektora is van, akkor impulzusa és impulzusnyomatéka is kell legyen. Legfeljebb a laboratóriumi méretekben, az áramkörök világában az látszólag nem oly lényeges (mert kicsi).

Ez a problémakör lesz tehát az, amivel a továbbiakban foglalkozni kívánunk. Annál is inkább, mert Planck „múlt századi” művei az egyetemi könyvtárak „túlzsúfoltága” miatt különféle vidéki tárolóhelyeken nyugszanak. Nem lehetséges, hogy az olvasók sétáljanak a könyvespolcok között, és itt-ott hol ebbe, hol abba a kötetbe betekintsenek, ahogy ez e sorok írójával történt, aki évtizedekkel ezelőtt látta Planck azon művét, amelyből az itt kifejtendő gondolatmenetet megismerte, de ma már sehol sem tud ráakadni. Ezért az Olvasók szíves elnézését kéri.

## Összefoglalás a Maxwell-egyenletekről

Akár mennyire is anakronizmus, hogy a Planck idejére vonatkozó elgondolások felidézése közben nem az akkor divatos CGS mértékrendszert, hanem a mai használatnak inkább megfelelő SI mértékrendszert használjuk, ezt azért tesszük, hogy a mai olvasók sokkal közelebb férkőzhessenek a mondanivalónkhoz.

Kezdjük tehát! A továbbiakban legyen  $\mathbf{E}$  az elektromos térerősség vektora,  $\mathbf{B}$  a mágneses indukció vektora,  $\mathbf{q}$  az elektromos töltés térfogati sűrűsége és  $\mathbf{J}$  az áramsűrűség vektora. A Maxwell-egyenletek szokásos alakja most:

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad (1.a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.b)$$

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{q}, \quad (2.a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.b)$$

Az itt fellépő  $\epsilon_0$  és  $\mu_0$  dimenziós arányossági tényezők (a vákuum esetére, mert egyébként  $\epsilon_0 \epsilon_r$  illetve  $\mu_0 \mu_r$  írandó, amennyiben nem vákuumról lenne szó).

A vákuum permittivitása:  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{ m}^{-1}$ , míg a közegé  $\epsilon_r \geq 1$ , valamint a vákuum permeabilitása:  $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ VsA}^{-1} \text{ m}^{-1}$ , míg a közegé, ha diamágnésről van szó, akkor  $\mu_r \leq 1$ , ha para- vagy ferromágnésről:  $\mu_r > 1$ .

Az (1) és (2) egyenletekben a  $\nabla$  vektor (a nabla) az helyvektor  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  szerinti differenciálás kifejezője:

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Mint ismeretes, az (1.a) egyenlet fizikai mondanivalója az, hogy a  $\mathbf{B}$  erőterének nincs forrása, mert *nem létezik mágnéses egypólus* (monopólus), csak dipólus vagy (magasabb rendű) multipólus, mert „a mágnésnek mindig van két pólusa: északi és déli!”

Az (1.b) egyenlet az *indukció törvénye*, eszerint az időben változó mágnéses erőter körbefutó (örvényes) elektromos erőteret kelt. A (2.a) egyenlet szerint az  $\mathbf{E}$  elektromos erőter forrásai az elektromos töltések méghozzá *egypólus* jellegűek (vagy páratlan multipólusok), mert a természetben lehet elkülöníthető egypólustöltést találni (pozitívát és negatívát is) stb. A (2.b) egyenlet azt fejezi ki, hogy az áramokat, és az

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

arányos „eltolási” áramot is mágnéses erőter vesz körül (az indukció törvényéhez hasonló ellenpár).

## A Maxwell-egyenletekhez kapcsolódóan az alábbi fontos megállapítások tehetők

a) A Maxwell-egyenletek alapvető törvényeket fogalmaznak meg. Az  $\mathbf{E}$  elektromos és a  $\mathbf{B}$  mágnéses erőter forrásai kétfélek, az elektromos töltések és az áramok (rendre), de vegyük észre, hogy *ezek nélkül is lehetséges elektromos, illetve mágnéses, egyszóval: elektromágnéses erőter, ez az indukció és az eltolási áram jelenségei jóvoltából is létezik!*

b) Az elektromos és a mágnéses erőterek, illetve a leírt jelenségkörök *nem függetlenek egymástól*, az egyik jelenségcsoport nem létezhet a másik nélkül. Ez tükröződik az (1) és (2) egyenletek csatoltságában. *Oersted* és *Faraday* leírták ugyan a gerjesztés és az indukció jelenségét, de az eltolási áram keltette mágnéses erőter bevezetésével Maxwell tette ezt a kapcsolatrendszert teljessé. Ez azért történhetett, mert az elektromos jelenségeket kísérő mágnéses történés nem volt elég intenzív ahhoz, hogy a kapcsolatot felismerjék.

## A Maxwell-egyenletek következményei

A Maxwell-féle általános törvényszerűségek felismerése éppen jókor jött – függetlenül a matematikai formalizmus kidolgozottsági szintjétől. Ne feledkezzünk el a La Manche, a Csatorna másik partján, a németor-

szági kutatókról. *Heinrich Hertz* (1857–1894) nevéhez fűzi a fizikatörténet az elektromágnéses sugárzás kísérleti felfedezését és elméleti leírását, aki Maxwell sejtése nyomán kísérleti bizonyítékát adta a fény elektromágnéses hullámzáskénti azonosításának.

Ha az  $\mathbf{E}$  elektromos térerősségre vonatkozó hullámegyenletet szeretnénk megtalálni (egyelőre vákuumban:  $\epsilon_r = \mu_r = 1$ ), az (1.b) egyenlet rotációját képezve

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$$

adódik, ahova a (2.b)-ből behelyettesítve

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

kapható. De mivel

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E},$$

ahol  $\Delta$  a Laplace-operátor, ezért

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}.$$

Ez pedig nem más, mint az  $\mathbf{E}$  elektromos térerősségre vonatkozó inhomogén hullámegyenlet. Az „inhomogén” jelző azt fejezi ki, hogy az  $\mathbf{E}$  térerősség alakulását később és másutt a  $\rho$  és a  $\mathbf{J}$  (is) meghatározza, a zárójelbe tett (is) pedig arra utal, hogy a térbeli tartomány *mindig* tele van az  $\mathbf{E}$  rezgéseivel, sőt, terjedő hullámaival.

(Még az a szerencse, hogy ezt az inhomogén hullámegyenletet a matematikai játékszabályok szerint úgy kell megoldani, hogy a homogén egyenlet általános megoldásához hozzá kell adni az inhomogén egyenlet egy megoldását – természetesen a kezdeti és peremfeltételek kielégítéséről sem feledkezzünk el). Annyi pedig világos, hogy ezen egyenletnek megfelelő hullámok – a vákuumban

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sebességgel terjednek. De nem feledkezzünk el arról sem, hogy *az E-re vonatkozó hullámegyenlet nem áll egyedül a Maxwell-egyenletek együttesében*. Mert lássuk akár mindjárt a

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

egyenletet. Egyelőre legyen szabad végtelen térben – vezetőktől és szigetelőktől elhagyott, töltés és árammentes esetről beszélni, akkor az

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$$

alakú (elemi) hullám – amelynek körfrekvenciája  $\omega$ , terjedési iránya  $\mathbf{k}$ , amplitúdója pedig  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  – *okvetlenül* együtt jár a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$$

indukcióvektor rezgésével (hullámával), mégpedig úgy, hogy mindig fennáll a

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$$

reláció, vagyis a  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$  vektorok egymásra merőlegesek és *jobbrendszert* alkotnak.

Megjegyezzük, hogy lehetnek olyan bonyolult elrendezések a térben, amelyekre ez a kategorikus kijelentés már nem áll fenn, vagyis nem biztos, hogy csak egymásra merőlegesek lesznek a hullámok, mint például töltéskoncentráció esetén. Ugyanis az  $\mathbf{E}$  és a  $\mathbf{k}$  skaláris szorzata ekkor nem nulla, hanem a töltéskoncentráció Fourier-transzformáltjával arányos.

Most még csak azt foglaljuk össze, hogy mi van, ha a közeg „mérsékelt” komplikáltabb, például nem vákuumról van szó, hanem a tér *óriási kiterjedésű, homogén és izotróp dielektrikummal* van kitöltve. (Természetesen, még tovább lehetne fokozni kristályos szerkezetű vagy elektroaktív, magnetoaktív anyaggal, de ettől most tekintünk el.) A homogén dielektrikumot eszerint a

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \text{ és}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

relációk jellemzik, az egyelőre *skalárnak* tekintett, a közegre jellemző  $\epsilon_r$  és  $\mu_r$  *relatív permeabilitás* és *relatív permittivitás* mellett, valamint feltesszük azt is, hogy  $\epsilon_r$  és  $\mu_r$  a térben és időben állandók és 1-nél nagyobbak. Ekkor a hullámegyenlet homogén része – röviden – így írható:

$$\left\{ \nabla^2 - \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0.$$

Az egyszerűség kedvéért így írva a hat hullámegyenletet, a három  $\mathbf{E}$ - és a három  $\mathbf{H}$ -komponensre. Innen olvasható, hogy ekkor a hullámok terjedési sebessége:

$$c' = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} < c_0$$

a mondott feltételek mellett, tehát *kisebb mint*  $c_0$ . (Lehet, hogy  $\mu_r < 1$ , így elvben  $c'$  nem feltétlenül kisebb mint  $c_0$ , de azt ma még nem tudjuk biztosan.)

Ezzel a megjegyzéssel beköszöntöttünk az optikába! A fény általában transzverzális rezgés, a hullám terjedési sebessége vákuumban  $c_0$ , közegben  $c' < c_0$ , a többi részletet – ha szükséges – a hullámegyenletek (parciális differenciálegyenletek) fáradtságos megoldása adja – a peremfeltételek és szimmetriaviszonyok miatt adódó komplikációk következtében sokszor bizony csak közelítő megoldás formájában.

Ami pedig a hullámok terjedését biztosító közeget illeti, felmerül a súlyos kérdés: hol, miben terjednek ezek a hullámok? Maxwell eredetileg feltételezett egy ilyen közeget (*æther*), de a Maxwell-elmélet mai, einsteini értelmezése szerint: *vákuumban!* Esetleg az azt kitöltő anyagi közegben, a dielektrikumban. Hiába örököltük elődeink „horror vacui” (irtózás az űrtől)

elvét. Ugyanakkor korai lenne eleve tiltakozni a „geometriai tér” fizikai szempontból „lehetőség” szerkezete ellen. A Maxwell-féle fenomenológiai (jelenségi) elektrodinamikában azonban erre nincs szükség!

A Maxwell-egyenletek együttese, mint parciális differenciálegyenletek csatolt rendszere, arra alkalmas, hogy *adott* töltés- és áramrendszer bemenő adataihoz (kezdeti és térbeli eloszlásához) meghatározza, hogy mi lesz az elektromágneses erőter alakja a tér minden pontjában és minden időpontban. Ehhez az üres (töltés- és árammentes) eset is rendelkezésre áll, a parciális differenciálegyenlet-rendszer matematikai megoldásának előírása ezt tartalmazza is.

Okvetlenül ki kell térnünk arra, hogy a (2.a) és a (2.b) egyenletekhez – a megoldás érdekében – a kezdeti időpontban nekünk olyan töltés- és árameloszlást kell megadni, amely nem lehet teljesen önkényes. Ennek belátásához a (2.b) első egyenletét idő szerint deriváljuk, az eredményt a (2.b) második egyenletébe helyettesítjük, ezzel adódik a

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \mathbf{J} = 0$$

úgynevezett *kontinuitási egyenlet*. Ez a töltéssűrűség és az áramsűrűség közti (folytonos) kapcsolatot, röviden *az elektromos töltés megmaradását* fejezi ki.

Ha már elektromos töltésről – és dipólusokról stb. – beszélünk, érdemes arra is kitérni, hogy *jelenlegi tudásunk* szerint *az elektromos töltés és a mágneses dipólus* (stb.) *nem létezik tömeg nélkül*. Az elektron töltésének és tömegének a hányadosát, a *fajlagos töltését* Robert Andrews Millikan (1866–1953) határozta meg először. A proton fajlagos töltése kisebb (a proton nagyobb tömege miatt), meghatározása nem okozott akkora szenzációt, mint az elektron esetében. A töltött mezonoké sem, a nehezebb barionoké sem. Az igazán jelentős lépésnek *az elektron* elemi fajlagos töltésének meghatározása, a töltés kétfajta előjelének megállapítása és a mágneses dipólnyomaték értékének mérése bizonyult.

**Az elektromágneses erőterben energia van, amely áramlik!**

Az elektromágneses erőter, mint láttuk, új és szokatlan szerzet volt a fizikában. Ráadásul, hiába tűnik ma a leg-egyszerűbb valódi fizikai *vektortér-kombinációnak*, mégsem volt elegendő, jó hatásfokú a matematikai fegyvertár, bármennyire is megbarátkoztak már a fizikusok és a matematikusok a lineáris rugalmasságtannal. Nem győzzük hangsúlyozni, mennyi zavart okozott a megértésben az, hogy *az elektrodinamikai hatás a vákuumban is képes tovaterjedni*. De, hogy ebben a fura erőterben, ami még a vákuumban is képes tovaterjedni, még az energia is képes áramolni, mindenesetre szokatlan (nem is beszélve arról, hogy az elektromágneses erőternek még más tulajdonságai is vannak!).

Lássuk csak! (Nekünk aránylag könnyű dolgunk van, hála a vektoralgebrának, a vektoranalízisnek, de legfőképpen a Heaviside-tól eredő átalakításoknak!)

A Maxwell-egyenletek első csoportját írjuk fel vákuumban, most így:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Az első  $\mathbf{E}$ -vel, a másodikat  $\mathbf{H}$ -val szorozzuk skalárisan:

$$\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{E} \mathbf{J} + \mu_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\mathbf{H}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Az első egyenletet elosztjuk  $\mu_0$ -val:

$$\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \mathbf{J} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Most pedig a két egyenlet különbségét képezzük (azonos dimenziójukról meggyőződve):

$$\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \mathbf{J} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

A bal oldalon alkalmazzuk a

$$\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b})$$

átalakítást. Ezzel a

$$\nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \mathbf{H}^2}{2} \right)$$

alakhoz jutunk. Ez az egyenlet röviden

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \mathbf{s} + \mathbf{E} \mathbf{J}$$

alakban is írható, ahol

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu_r \mathbf{H}^2),$$

(általánosítva arra az esetre, amikor  $\epsilon_r$  és  $\mu_r$  is jellemzi a környezetben lévő anyagot), az

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

pedig a *Poynting-vektor*. Szemmel látható, hogy ez az eredmény az elektrodinamikai energiatétel! Az elektromágneses energiasűrűség (egy térfogatban, amire integrálnunk kell!) fog, mert a térfogatból kiáramlik az  $\mathbf{S}$  térenergia-áramsűrűség (amit a térfogat felületére kell integrálni, hiszen *áramsűrűségről* van szó!), illetve, a térfogatban  $\mathbf{E} \mathbf{J}$  energiasűrűséget felemészt az áram Joule-hője alakjában. Az  $\mathbf{S}$  a Poynting-vektor pontosabb jelentése a felületegységen időegység alatt kiáramló térenergia. Az  $\mathbf{S}$  bevezetését *John Henry Poynting* (1852–1914) angol fizikus érdemének tekintjük, akinek az volt a meggyőződése, hogy az elektromágneses erőter az anyagi világ egyik megnyilvánulása (1884).

Az elektromágneses erőternek impulzusa is van!

Az impulzus is gyakori szereplője a klasszikus fizikának, hiszen a mozgó testeknek van impulzusuk. De, hogy az elektromágneses erőternek is? Ezt meg kell vizsgálni!

Vegyük azt az esetet, hogy egy  $\mathbf{q}_m$  mechanikai tömegsűrűségű anyagdarabnak  $\mathbf{q}$  töltéssűrűsége is van, ezért rá elektromos erőter hat, és ha mozog, akkor még áramsűrűséget is képvisel, így a környezet mágneses erőtere is hat rá. Ezt fejezi ki a mozgásegyenlet, ahol a jobb oldalon a Lorentz-erő (sűrűsége) is szerepel:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_m \mathbf{v}) = \mathbf{q} \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

Itt

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} \mathbf{v}.$$

Ezt az erőt *Hendrik Antoon van Lorentz* holland fizikus (1853–1928) ismerte fel. Most ebben a képletben a  $\mathbf{q}$  töltéssűrűséget és a  $\mathbf{J}$  áramsűrűséget fejezzük ki a Maxwell-egyenletek sajátos olvasatával (jobbról balra):

$$\mathbf{q} = \nabla \mathbf{D},$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

(Mellesleg érdemes egy pillanatra elgondolkodni azon, hogy ezek a „fordítva olvasott egyenletek” a töltés és áram bizonyos jellegzetes erővonalképéről is árulkodnak!)

Ezzel a mozgásegyenlet jobb oldalát átalakítjuk:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_m \mathbf{v}) = \mathbf{E}(\nabla \mathbf{D}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Ha most alkalmazzuk a

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

differenciálási szabályt, akkor a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{q}_m \mathbf{v}) + \frac{d}{dt}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) &= \\ &= \mathbf{E}(\nabla \mathbf{D}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk. Itt a kifejtési tételt fogjuk alkalmazni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] &= -\frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] = \\ &= -\left( \nabla \frac{B^2}{2\mu_0} - \mathbf{B} \frac{\nabla \mathbf{B}}{\mu_0} \right). \end{aligned}$$

Az utolsó tagról belátható, hogy tisztán örvényes terек esetén, mint amilyen  $\mathbf{B}$ , zérus. Így kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{q}_m \mathbf{v} + \mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \mathbf{E}(\nabla \mathbf{D}) - \nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Itt ismét felhasználjuk az indukciós Maxwell-egyenletet és kiderül, hogy

$$\mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{D}) = -\left( \nabla \frac{D^2}{2\epsilon_0} - \mathbf{D} \frac{\nabla \mathbf{D}}{\epsilon_0} \right).$$

Ha feltételezzük, hogy a vizsgált tartományban nincsenek töltések,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_m = 0$ , akkor  $\mathbf{D}$  tisztán örvényes erőter,  $\mathbf{D}(\nabla \mathbf{D}) = 0$  és a jobb oldalon álló utolsó tag is eltűnik. Rendezés után – töltött anyag nélkül – a mozgásegyenlet

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = -\nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{D^2}{2\epsilon_0} \right).$$

Ebből kiolvassuk, hogy az impulzus nem csak mechanikai lehet, hanem ilyen fizikai mennyisége az elektromágneses erőternek is van. Ez pedig a  $\mathbf{g}$  elektromágneses impulzussűrűséggel írható le:

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

És most jön a meglepetés!

De hát még csak most jön a java! Ha az elektromágneses erőternek van

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

impulzussűrűsége és van

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

elektromágneses energiaáram-sűrűsége, akkor vegyük észre, hogy  $\mathbf{g}$  és  $\mathbf{S}$  párhuzamos vektorok, tehát könnyű leolvasni, hogy egymással arányosak:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{g} = \mu_0 \mathbf{S},$$

vagyis

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{g} = \mathbf{S},$$

ami a korábbi, vákuum esetén tett megállapításunk szerint

$$\mathbf{g} c^2 = \mathbf{S}.$$

Ez a reláció először Max Plancknál jelent meg! *Ez pedig igazán furcsa megállapítás az elektrodinamikában!* Tulajdonképpen, ha azt mondanánk, hogy az

elektromágneses erőter térfogategységre eső része  $M$  tömegű, és ez az „anyag”  $c$  sebességgel terjed, valamint energiája (térfogategységben)  $\mathcal{E}$ , akkor

$$\mathbf{g} c^2 = \mathbf{S}$$

alapján adódik, hogy az elektromágneses erőter olyan fura „anyag” amelyet tesz a

$$\mathcal{E} = M c^2$$

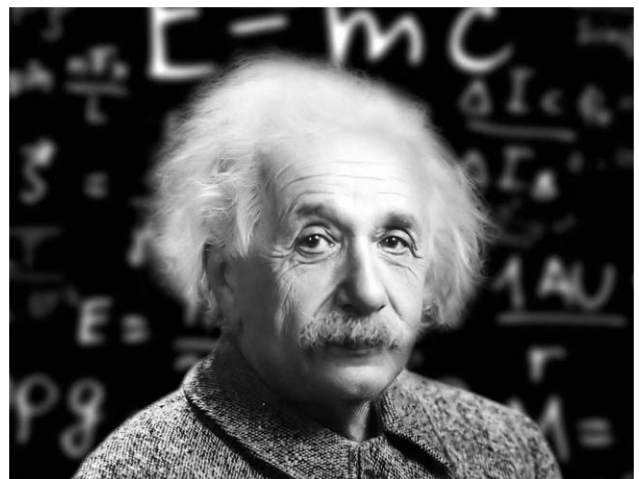
relációnak. *Ez Max Planck megállapítása.* A 19. század végén, még a relativitáselmélet megszületése előtt, sőt, a fotonhipotézis és a kvantumhipotézis előtt!

## Konklúzió

Az eddigiekből világosan látszik, mekkora hatással volt az elektrodinamika megjelenése és kifejlődése J. C. Maxwell és O. Heaviside – meg természetesen sok más kutató (H. Hertz, M. Planck) nyomán. Igen lényeges, hogy az elektrodinamikába belépő kutatók egy *Új Világban* találták magukat (ez a „feltalálás” azért eltartott pár évtizedig). Mi volt a kulcs? Az elektromos és a mágneses erőter kapcsolatának, egymásra utaltságának felismerése. Mi volt a jutalom? A technikai élet villamosítása gyakorlati szempontján és az optika meghódításán túl *az egységes, elektromágneses erőter komolyan vétele* mellett az a megállapítás, hogy *az elektrodinamika nem klasszikus tudomány, hanem a relativitáselmélet kiépítésének kapuja!* És az sem elhanyagolható jellemvonása a felfedezésnek, hogy íme, van egy új, gyakorlatilag is fontos erőter, ami *nem* a klasszikus fizikát (a Galilei-transzformációt) követi!

Erre a konklúzióra épül, hogy Albert Einstein felismeri a speciális relativitás elvét (a fénysebesség vákuumbeli értékének univerzális szerepét) azt, hogy a Galilei-transzformáció nem univerzális, hanem csak a Lorentz-transzformáció – (vákuumbeli) fénysebességhez képest – kicsi sebességekre vonatkozó közelítése. Az elv felismerése után megalkotta a speciális relativitás

5. ábra. Albert Einstein



tás elméletét, amiben az elektromágneses tér új arcu-  
lata jelenik meg: a vektorpotenciál négyes vektortér  
formájában, a térerősségek tenzortér alakjában. S har-  
cokkal teli bő évtized után az is kiderül, hogy a gravi-  
táció sem (Galilei-invariáns) skalártér, egyetlen skalár  
gravitációs potenciállal, hanem (négyes) tenzortér, a  
négy dimenziós Riemann-térben.

S gondoljunk bele, hogy milyen messzire ható sze-  
repet játszott ebben a fejlődésben Max Planck „pará-  
nyi” felfedezése: az  $E = mc^2$  megállapítása az elektro-  
dinamikában!

Ezért aztán egyáltalán nem véletlen, hogy Albert  
Einstein (5. ábra) korszakalkotó cikke [4], a *Mozgó  
testek elektrodinamikája* – ami köztudottan a speciális  
relativitáselmélet hivatalos nyitányává vált – éppen a  
Maxwell-egyenletekkel kezdődik [1]. Einsteinnek az a  
cikke [5], amiben az  $E = mc^2$  állítást megfogalmazta  
az elektrodinamikában, hosszabb kutatómunkára  
serkentette Max Planckot az állítás általánosításának  
bizonyítására.

## Irodalom

1. J. C. Maxwell: *Treatise on Electricity and Magnetism I., II.* Clarendon Press, Oxford, 1873.
2. Zemplén Győző: *Az elektromosság és gyakorlati alkalmazásai.* (A Természettudományi Társulat könyvsorozatának 82. kötete, Budapest (1910) 884.
3. Novobátzky Károly, Neugebauer Tibor: *Elektrodinamika és optika.* Egyetemi tankönyvkiadó, Budapest, 1952.  
Nagy Károly: *Elektrodinamika.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.  
Hevesi Imre: *Elektromosságtan.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Buda-  
pest, 1998.  
Litz József: *Elektromosságtan és mágnességtan.* Műszaki Könyv-  
kiadó, Budapest, 1998. (Ez a könyv tartalmaz utalást az  $E = mc^2$   
törvényre.)  
Litz József: *Fizika II. – Termodinamika és molekuláris fizika –  
Elektromosság és mágnesség.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Buda-  
pest, 2005.
4. Albert Einstein: Elektrodinamik bewegter Körper. *Annalen der  
Physik* 4/18 (1905) 891–921. – magyarul: A. E.: *Mozgó testek  
elektrodinamikája, válogatott tanulmányok.* Gondolat Kiadó,  
Budapest, (1971) 55–73. – A. E.: Válogatott írásai. *Principia Phi-  
losophiae Naturalis* 4. Typotex Kiadó, Budapest (2005) 81–103.
5. Albert Einstein: Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Ener-  
gie. *Annalen der Physik* 4/23 (1907) 371–384.

## A FIZIKA TANÍTÁSA

# »ILYEN A FIZIKA – AZ EMBER MEGFIGYEL ÉS TANUL«

A romániai Nagyváradon *Bartos-Elekes István* fizikatanár minden év őszen nemzetközi fizikaversenyt rendez. Minden gimnazista részt vehet rajta. Németországból is szívesen fogadnak diákokat.

Nagyváradon az Ady Endre Gimnázium nehéz, fából készült bejárati ajtói nyikorognak. Az embernek erő kell a kinyitásukhoz. Ezeket az ajtókat Bartos István már számtalanszor kinyitotta. Több mint 20 évig tevékenykedett ebben az iskolában, mint fizikatanár. A 244 éves épület a városközpontban van, az állami színház mögött. Közvetlen közelében fekszik a sétálónegyed, kellemes kávézókkal és kis üzletekkel.

A gimnázium és a fizika a nyugdíjban sem ereszti el Bartos Istvánt. Még mindig kapcsolatban van az iskolával. Az aulában még mindig köszönti őt *Ady Endre* mellszobra, azé a költőé, aki Magyarországon és a jelentős magyar lakossággal bíró Nagyváradon is hírességnek számít, és aki az intézmény névadója.

A München melletti Max Planck Kvantumoptikai Intézet *Photonworld* internetes folyóiratában megjelent egy beszámoló a Schwartz-versenyről és a *Bartos-Elekes István* által létrehozott Fizikumról (<https://www.photonworld.de/nc/en/magazin/artikel/so-ist-physik-man-beobachtet-und-lernt/aseite/1.html>). A szokásos német-angol változat mellett lefordították magyarra is (<https://www.photonworld.de/nc/en/magazine/article/ilyen-a-fizika-az-ember-megfigyel-es-tanul/aseite/1.html>). Ezt az írást közöljük, bemutatva Bartos-Elekes István majd negyedszázados munkájának eredményét.

Bartos Istvánnak jó kedve van. Előző nap itt zajlott le az általa sikeresen szervezett fizikaverseny. Több mint 50 diák jött el, hogy szembenézzen azokkal a feladatokkal, amelyeken Bartos István előtte 3 hónapig dolgozott. Még ugyanazon az estén – a meghívott neves tudósok előadásaival tarkítva – megtörtént a győztesek kihirdetése. Ebben az évben Bartos István egy új vendéget is köszöntött, *Krausz Ferenc* professzort, Münchenből. Az ultrarövid időskálán lezajló folyamatokkal foglalkozó fizikus bemutatta a diákoknak és a tanároknak az attoszekundumos fizikát. Azt a kutatási területet, ahol a tudósok a lézertechnológia segítségével bepillantást nyernek a mikrokozmosz mélységeibe és felderítik az elektronok viselkedését.

Most, a verseny utáni napon Krausz és a vendéglátója a gimnázium patinás fizikatermében meghitten üldögélnek. Itt tanított Bartos István, itt érzi jól magát. A faburkolattal ellátott falakon stroboszkópos technikával készült fényképek lógnak. Felettük egy régi, képcsöves monitor trónol, ez a számítógép-vezérelt iskolacsengő, még 1991-ből. A bejárati ajtó mellett a gravitációs gyorsulás meghatározására szolgáló, maszszív kísérleti szerkezet függ. És Bartos István gyorsan mesélni kezd.

„Ebben az évben 26. alkalommal rendeztük meg ezt a fizikaversenyt” – mondja büszkén. – „Már voltak itt versenyzők Albániából, Moldáviából és természetesen Magyarországról.” Szívesen köszöntene egyszer részt-