

páros, egyetlen minimumú $v(x)$ potenciál esetére. Válasszuk az origót a potenciál minimumának. A pozitív és a negatív x értékekhez tartozó potenciálból pozitív időkre két különböző rugófüggvény definiálható $k_1(t) = v(t=x>0)$ és $k_2(t) = v(t=-x>0)$. Mivel a hullámfüggvénynek mind a pozitív, mind a negatív végtelenben el kell tűnnie, a megfelelő vezérlési feladatban két különböző differenciálegyenletet kell megoldanunk, mindkettőt pozitív időkre, s ugyanazzal a d -vel:

$$\ddot{x}_i(t) = -[d - k_i(t)]x_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

A kezdőfeltétel az, hogy az 1-es esetben $x_1(0) = 1$, $v_1(0) = v_0$, a másik esetben viszont $x_2(0) = 1$, $v_2(0) = -v_0$, ugyanis az x_2 megoldás x -tengelyre való tükrözésével kapott teljes megoldás: $\psi(x>0) = x_1(t=x)$, $\psi(x<0) = x_2(t=-x)$ csak így lehet folytonosan deriválható az origóban. Az energiaspektrum megtalálása azt jelenti, hogy minden egyes véges v_0 és d mellett végig kell próbálnunk, hogy vezérelhető-e *mindkét feladat egyszerre*.

Összefoglalás

Megmutattuk, hogy létezik egy időfüggő vezérlési feladat, amely szoros hasonlóságot mutat az egydimenziós kvantummechanikai energiasajátérték-problémával, amennyiben a helykoordinátában páros potenciálokat vizsgálunk. Még ekkor is, a vezérlési feladatnak jóval több diszkrét megoldása létezik, mint a

kvantummechanikainak, mert a vezérelt részecskének lehet kezdősebessége is. A sikeres vezérlés mindig egy instabil pont (az origó) elérését jelenti, ami csakis a stabil sokaság mentén lehetséges. A vezérlés feltétele tehát úgy fogalmazható meg, hogy a kezdőfeltétel essen rá az origó stabil sokaságára. A dinamikai rendszerek szemlélete új megvilágításba helyezi a klasszikus kvantummechanikai energiasajátérték-problémát is.

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük *Varga Balázs* tanár úrnak (Eötvös József Gimnázium, Budapest), hogy olyan modern fizikai órákat tartott, amelyek alapján a 11-edikes diákban felmerült a kérdés: mi lehet a Schrödinger-egyenlet időbeli megfelelője. Ez vezetett el a bemutatott gondolatmenethez.

Irodalom

1. Nagy Károly: *Elméleti Mechanika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
2. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2002.
3. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Kaotikus Dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
4. <http://ni.com/labview>
5. Marx György: *Kvantummechanika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.
6. F. Constantinescu, E. Magyar: *Kvantummechanika Feladatok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
7. L. D. Landau, E. M. Lifšic: *Kvantummechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
8. N. Rosen, P. M. Morse, *Phys. Rev.* 15 (1932) 210.

A FIZIKA TANÍTÁSA

KÖZÉPISKOLAI DEMONSTRÁCIÓS KÍSÉRLETEK ELEMZÉSE

Wiedemann László
Budapest

A görög filozófiai felfogás szerint az axiomatikus gondolkodás és annak eredményei bírnak csupán igazságtartalommal. Az empiriával szemben arisztokratikus módon elzárkóztak, szinte lenézték azt.

A megismerés folyamata az újkorban épül tovább, és kellő filozófiai súlyt kap *Bacon* és *Hume* munkássága által, amikor az empiria is a megismerés hiteles módszerévé, hiteles eszközzé válik. Az empiria anyaga adja az axiomatikus gondolkodás tartópilléreit és frissíti az axiómákat, ahogy ezt manapság elképzeljük. *Galileinél* tetőzik ez a kettősség a módszeresen végigvitt kísérletezésben és elméletalkotásban. Ezáltal bővülnek a természettudományban az igazságkritériumok. Megfigyelés és kísérlet az egyik oldalon, elméletalkotás a másik oldalon.

Fizikátörténeti előadásaiban *Simonyi Károly* professzor mindig nyomatékkal emelte ki a kísérletezés

fontosságát; úgy mondta gyakran, hogy „Galilei vett egy lejtőt”, vagyis nemcsak elképzelte, vagy az ideáját tekintette, hanem kézbevette és méréseket végzett vele.

A sorra kerülő kísérletek nem kutatás célúak, hanem igazoló, illetve a törvény érvényességét alátámasztó kísérletek. A tanításban főleg ilyenek szerepelnek, de előfordulnak fizikai mérések, mérő-kísérletek is. Itt sohasem felfedezésről van szó, hanem vezetésről. Naivitás felfedezésként aposztrofálni az iskolai fizikai méréseket. Inkább utánérzésről van szó, jelentős kutatók eljárásait ismételjük meg célirányos módszertani egyszerűsítésben.

Empíria és kísérlet előzetes, vonatkozó elméleti ismeretek nélkül semmit sem ér. A dolog értelméhez kell eljutni. Ezt nem nyerhetjük a látványosság szépségével vagy egyszerű manipulációval. A látottak mö-

g  kell nézni, távolabbi szintetizálás, vagyis valamilyen szeml letalkotás érdekében. A kísérleti eredményeket kell beilleszteni már ismert elméleti rendszerbe. Amikor ez nem megy, ott állunk a nagy felfedezések k szb ben.

A kísérletek ilyen értelmezése sorrendet jelöl ki. Az előbbiek szerint elsőként a kísérlet mélyebb értelmezése, ezután viszont visszatérés az alapszitu ci ra, de más oldalról való közelítéssel. Ezáltal megvalósul a tapasztalat és elmélet erősebb összekapcsolása. Mindent a matematika fokozott bevonásával tesszük. A kísérlet és elmélet egységében egy új igazs gkritérium jelenik meg. Sok esetben az elemzések differenciál-egyenletek alkalmazását is szükségessé teszik. Ilyenkor mindig tanári szintre kell gondolni, de kell  módszertani tudással vissza lehet t rni egyszerűbb magyarázatra is.

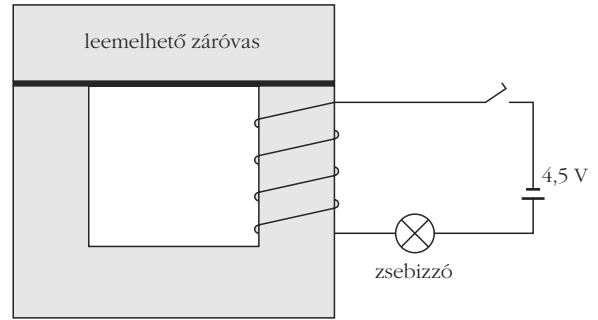
Ellenpontk nt itt belép egy ismert didaktikai aggály. Vannak, akik az egyszerűség b v letében  lnek,   vélemény a naivit sig mehet. Mondják, a természet olyan egyszerű és világos, csak követni kell. A kísérletek és a magyarázatok is legyenek egyszerűek, minden más t lbbonyolítás.  gy gondolják, ha a látvány szórakoztató, már érthető is a kísérlet. Lebilincselni ajánlatos, de nem elegendő. Hasonló ez a feleletválasztós kérdések attrakci ihoz; felsz nss get hordoz a konstrukciójuk, ezt preferálják, holott valójában a kérdések j k és tartalmasak.

Tehát vigyázzunk a túlzott analiz lással, de a túlzott egyszerűsítéssel is. *H rtlein Károly* barátom (BME Fizikai Intézet) gyakorta szokta emlegetni beszélgetéseinkben *Einstein* egyik ominózus k t tel t, amely szerint „egyszerűsítők le a tudományos magyarázatokat, amennyire lehet, de annál jobban semmiképpen”.

Lássunk néhány példát a problémakezelés egymásra épülő szintjeire.

Vasmag leemelése-leszakítása áramjárta tekercsről

Az iskolai demonstrációs transzform tork szletb l veszünk egy tekercset (1200 menetes), ezt ráhúzzuk a vasmagra és zárt vasmagot hozunk létre. Ezután egyszerű egyenáramú áramkört létesítünk 4,5 voltos tepleppel a tekercs és egy zsebizz  sorba kötésével (1.  bra). A kísérlet most annyi, hogy a vasmag felső részét (elég nagy erővel) leszakítjuk az als r l. Ekz ben azt látjuk, hogy az izzó erőteljesen felvillan, majd ismét visszanyeri eredeti fényerejét. De még ki is  ghet. Ha a vasmag leszakított részét, a felső leemelt részt r ejtj k az alsó részre –  gy ismét zárt vasmagunk lesz –, a r es s rövid időtartamára az izzó fénye teljesen elhalványodik, majd rövidesen ismét visszanyeri eredeti fényerejét. A kísérlet látványos, a magyarázat az elektromágneses indukció nem szokványos megjelenésére utal, amikor egy mágneses k r mágneses ellenállása változik. Az értelmezés, egyre mélyebben, három lépcsőben lehetséges.



1.  bra. Kísérleti összeállítás a vasmag leemel s hez-leszakításához.

Kvalitatív magyarázat. A leszakítás ideje alatt az izzón átfolyó áram megnő, mivel fényereje nagyobb lett. Ez csak  gy lehetséges, hogy fellépett egy beiktatott ellenfesz lt s. Ez éppen a körben keletkezett indukált fesz lt s, ami fluxusváltozás eredménye.  gy vehetjük, hogy leemel skor zárt vasmag helyett l gr ssal b r  vasmagos tekercs nk lesz. Minthogy a B -t r forrásmentes ($\text{div} B = 0$), és a B -vonalak merőlegesek a vas-levegő elválasztó felületre, a l gr ssal b r  mágneses körben mindenhol ugyanannyi és k nyven kiszámítható B -vonal halad. Ezen B -vonalak száma a légrés miatt most jóval kevesebb, mint zárt vasmag esetén, tehát a (BA) fluxus csökkent,  gy a vasmagot körbe fog  tekercsben indukált fesz lt s keletkezik a leemel s ideje alatt, amely az áramkörben a telepfesz lt s hez előjelesen hozzáadódik. A Lenz-törvény következtében viszont az indukált fesz lt s a fluxus csökkenését akarja akadályozni, az eredeti fluxust akarja fenntartani, tehát a k r összes fesz lt s g t növeli, ezáltal növeli a k r  ram t, hogy az eredeti fluxus kevesebb csökkenjen. Ezért az indukált fesz lt s növeli a k r összes fesz lt s g t.

A vasmag r ejt s kor éppen a fordított zajlik; itt az indukált fesz lt s a már kisebb fluxust akarja fenntartani,  gy most a telepfesz lt s g t ellentétes, aminek következtében kevesebb áram folyik a körben, mint az eredeti teljes fluxus esetén.

A kísérleti elrendezést egy x vastagságú l gr ssal ellátott toroid tekercs el modellezhetjük. Írjuk fel a gerjesztési törvényt a körre, amikor figyelembe vesszük, hogy $B = \mu H$, ahol $\mu = \mu_0 \mu_r$. Ezzel egyúttal kijelölt k az egyszerűsítés egy k r t, amennyiben a hiszter zsigorbe helyett B  s H között lineáris kapcsolatot tételezünk fel.

Kihasználjuk, hogy a mágneses körben B mindenhol ugyanaz, mivel a B -t r forrásmentes, továbbá B -nek normál komponense a vas-levegő elválasztó felületen maga a teljes B - rt k. A számítás vonalintegrál helyett most szorzat sszegre redukálódik:

$$\frac{B}{\mu_1} (l - x) + \frac{B}{\mu_2} x = n I,$$

ahol az első tagban a vas permeabilitása szerepel, a második tagban a levegőé, továbbá l a toroid középvonalának hossza, n a tekercs menetszáma, I a k r áramerőssége. Mivel a vas relatív permeabilitása ~

5000, a levegőé viszont 1, ezért jó közelítéssel az A keresztmetszetű vasmag fluxusa

$$\Phi = \mu_2 \frac{nIA}{x}.$$

A légrés növelésével a fluxus láthatóan csökken. Ennél a közelítésnél a hiszterézisgörbét kiiktattuk, mivel ezáltal a jelenséget meghatározó hatás a légrésre koncentrálódik.

Az előbbi leírás ugyan már kvantitatív, de csak közelítő jellegű, ugyanis x növelésével maga a gerjesztő I áram is változik, így I magának x -nek is függvénye. A további számoláshoz x változását elő kell írunk, például állandó sebességgel emeljük le a vasmagot. Ez a legegyszerűbb eset: $x = vt$, v a leemelési sebessége, t az idő. Ha most így az $x(t)$ függvényt ismerjük, akkor a körre felírt huroktörvény segítségével ez a bonyolult folyamat differenciálegyenlettel leírható:

$$IR + \frac{d\Phi}{dt} = U_e,$$

ahol R a kör teljes ohmos ellenállása, a jobb oldal a telep feszültség és Φ deriváltját az első képletből kell előállítani oly módon, hogy az áramot is az idő függvényének tekintjük. Tehát ezt a deriváltat törtfüggvény deriváltjaként kell előállítani. Ezáltal $I(t)$ -re differenciálegyenletet kapunk. A részletek megtalálhatók a szerző egyik cikkében: *Fizikai Szemle* 1970/3. szám. Ezúttal tájékozódásképpen egyszerűbb közelítést veszünk. Mivel a légrés vastagsága kicsi, és állandó sebességgel mozgatjuk a vasmagot, azért vegyük most x átlagát, ami egy állandó érték és ezt a törtfüggvény idő szerinti deriválásakor a végén vesszük figyelembe:

$$\frac{d\left(\frac{I}{x}\right)}{dt} = \frac{I'k - Iv}{k^2},$$

ahol k jelenti x átlagát, vagyis a résszélesség felét és v a már mondott mozgatási sebesség. Ezt a fenti huroktörvénybe helyettesítve kapunk egy elsőrendű, inhomogén differenciálegyenletet az $I(t)$ függvényre: $aI' + bI = U_e$, ahol a és b állandók. $b = R - \lambda v$, λ szintén állandó. Az áramerősségre a partikuláris megoldás

$$I_p = \frac{U_e}{R - \lambda v}.$$

Ha az eredeti, légrés nélküli állapotban számolnánk az áramerősséget, Ohm törvénye alapján

$$I = \frac{U_e}{R}$$

értéket kapnánk. Világosan látszik, hogy az előbbi áram – mikor a vasmagot leszakítjuk – nagyobb mint a stacionárius áram, és pedig nagyobb szakítási sebesség esetén nagyobb lesz.

Felfüggesztett rugó anyageloszlása

Nagy átmérőjű (~ 10 cm), sűrű menetű, laza spirálrugót (slimky) egyik végénél fogva felemelünk és nyugodtan tartjuk. Függetlenül lóg, a másik vége szabad. Az egyes menetek távolsága mérvadó a helyi anyageloszlásra (2. ábra). Azt tapasztaljuk, hogy a menetek egymás közti távolsága a felfüggesztés közepében a legnagyobb. Úgy mondhatnánk, hogy ez a spirálrugó-alakzat a felfüggesztés körül a legritkább. Nem a rugó anyagának a sűrűségéről van szó! Határozzuk meg számolással és méréssel ebben az állapotban anyageloszlását. Hasznos lehet a vonalsűrűség fogalmának bevezetése. A ρ vonalsűrűsége az egysegnyi hosszúságra eső tömeget értjük.

A középiskolai gyakorlatban, ha a Hooke-törvény előfordul, akkor azt többnyire a szál végére írjuk fel. E problémában általánosítva felhasználjuk, hogy a Hooke-törvény a rugalmas szál belső pontjaira is érvényes, egyben differenciális formában is. A spirálrugó-alakzatot egészében rugalmas szálnak tekintjük. A differenciális Hooke-törvény alkalmazásakor határátmenettel a vonalsűrűség helyfüggése meghatározható: $\rho = \rho(x)$, ahol x a megnyúlt szál mellett képzelni nyújtatlan szálon – az úgynevezett referenciaszálon – a befogástól számított távolság. A 2. ábra alapján okoskodunk, de először általánosságban, vagyis a szálat nem feltétlenül gravitációs erő terheli. Hason F erő a szál végére a szál egyenesében! Vizsgáljuk a belső pontok elmozdulásait a referenciaszállhoz képest! Legyen P_1 pont x_1 távolságra a befogástól, P_2 legyen x_2 -re a referenciaszálon mérve! Az F erő hatására P_1 eltolódik és az x_1 szakasz megnyúlása y_1 , az x_2 szakaszé y_2 , így a Δx szakasz átmege $\Delta x'$ -be. Mennyi ez?

$$\Delta x' = (x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = \Delta x + \Delta y.$$

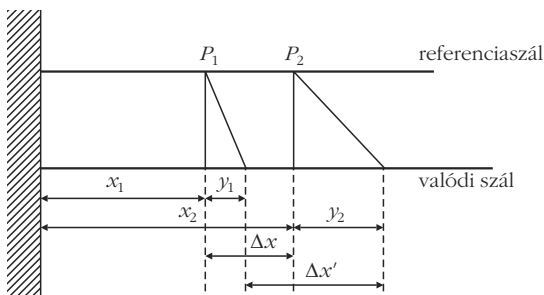
Az y érték a helyi megnyúlás, Δy a Δx hosszúságú szakasz megnyúlása, ahogy a referenciaszálon előre haladunk. Mi a kapcsolat ρ és y között? Ez abból az észrevételből adódik, hogy bárhol is tekintünk egy Δx darabot a referenciaszálon, a benne foglalt tömeg ugyanaz, mint a valódi, vagyis a megnyúlt szálon található $\Delta x'$ -ben. Ezért az $m = \rho l$ definíciós képlettel, $\rho \Delta x' = \rho_0 \Delta x$, ahol ρ_0 a nyújtatlan szál vonalsűrűsége, ρ a nyújtott szálé. $\Delta x'$ értékét helyettesítve, ρ -ra kapjuk, hogy

$$\rho = \rho_0 \frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta y} = \rho_0 \frac{1}{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Végül határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{dy}{dx}}.$$

Ez eddig általánosságban igaz. Ha tehát ismerjük az y helyi megnyúlás x -függését, a megnyúlt szál $\rho(x)$ anyag-



2. ábra. A rugó és a referenciaszál megnyúlása.

eloszlása meghatározható. A jelen esetben $y(x)$ meghatározása most már azon alapul, hogy a Hooke-törvényt a szál belső pontjaira írjuk fel. A Hooke-törvényben $F(x)$ a szál egyik belső pontjában fellépő erőt jelenti. Alkalmazzuk $\rho(x)$ képletét a felfüggesztett szálra! A referenciaszál P pontjában a húzóerő a Palatti szálrész súlya. Tekintsük ezután a Δx hosszúságú, A keresztmetszetű szakasz megnyúlását! Erre írjuk fel a Hooke-törvényt:

$$\Delta y = \frac{1}{E} \frac{\Delta x [(L-x) \rho_0 g]}{A}.$$

Ezután képezzük a $\Delta y/\Delta x$ hányadost, majd határértékre térünk és ezzel az y helyi megnyúlásra kapunk egy differenciális formulát:

$$y' = \frac{\rho_0 g}{EA} (L-x).$$

Az egész szálra vonatkozó Hooke-törvényből számolható, hogy $EA = DL$, ahol D az egész szál direkciós ereje, L a referenciaszál hossza. Így

$$y' = \frac{\rho_0 g}{DL} (L-x).$$

Ha ezt behelyettesítjük ρ fenti általános képletébe, megkapjuk a megnyúlt szál keresett anyageloszlását:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\rho_0 g}{DL} (L-x)}.$$

Látható, ha $x = 0$, vagyis a felfüggesztésnél ρ a legkisebb, míg $x = L$ -nél ρ a legnagyobb, éppen ρ_0 . Így $\rho(x)$ megadja a rugalmas szál anyageloszlását.

Meghatározhatjuk a szál teljes megnyúlását is. Mivel dy a dx szakasz megnyúlása, azért a szál teljes megnyúlása

$$\Delta = \int_0^L dy = \frac{\rho_0 g}{DL} \left[\left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \right]_0^L = \frac{\rho_0 g L}{2D},$$

vagy

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{mg}{D},$$

ahol m a szál tömege. A képletnek szemléletes jelentése van: mintha D direkciós erejű súlytalan rugalmas

szálra m tömegű testet függesztenénk, ekkor Δ jelenti az itteni megnyúlás felét.

A mérést itt úgy végezzük, hogy a nyújtott szálon egyenlő szakaszokat tekintve, feljegyezzük, hogy hány menet esik egy-egy szakaszra. A menetek száma közelítően követi a sűrűsége adott anyageloszlást.

Léggömb felfúvódása evakuált térben

Kis lufit veszünk – ne fújjuk fel –, jól lekötjük, és helyezzük el lazán az iskolai demonstrációs légszivattyú üvegharangja alá. Ezután kezdjük a leszívást. A lufi kigömbölyödik, dagad, nagyra nő, akár szét is pukkanhat (3. ábra). Vizsgáljuk a lufi sugarát az evakuált tér nyomásának függvényében, és igyekezzünk feltételel találni arra, hogy még éppen ne pukkanjon szét.

A jelenséget lényegében a lufi anyagának E rugalmassági modulusza és a nyomáskülönbség határozza meg. Mint érdekesség említhető, hogy leszívás közben az evakuált tér p_k nyomásának csökkenésével a lufi belsejének p_b nyomása is csökken, holott első pillanatra azt várnánk, hogy nagyobb nyomás feszíti.

Két formulát használunk fel: a műszaki mechanikából ismert úgynevezett kazánformulát és a differenciális Hooke-törvényt. Az első esetben, ha a kazán terében p_b nyomás uralkodik, a kazán falában σ feszültség ébred. Hengeres vagy gömb alakú kazánnál egy kettes faktortól eltekintve a képletek azonosak. A kazánformula:

$$\sigma = \frac{Rp}{2v},$$

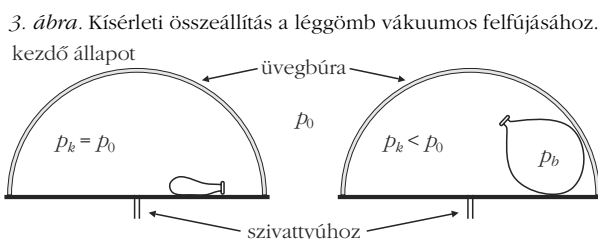
ahol R a gömb (lufi) sugara, v a falvastagság, amit ezúttal állandónak veszünk – egyébként még a Poisson-számot is figyelembe kellene vennünk. Végül p a gömbbelső – értelemszerűen a p_k -hoz viszonyított – nyomást, vagyis a relatív nyomást jelenti: $p_b - p_k$. Jogos még azt feltételezni, hogy a lufiban lévő levegő izotermikusán tágul. Mindezekből adódik egy egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} p_k + \frac{2\sigma v}{R} &= p_b, \\ p_b &= \frac{p_0 V_0}{V}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$V = 4R^3 \pi \frac{1}{3},$$

$$\sigma = \epsilon E, \quad (2)$$

$$\text{differenciálisan: } d\sigma = E \frac{dR}{R}.$$



Az utolsó képlethez részletesebb megjegyzés kívánkozik.

Tekintsünk egy analóg helyzetet. Rugalmas szálat nyújt a végén ható F erő. Tetszőleges x helyen az y megnyúlás

$$y = \frac{1}{EA} Fx,$$

ha F minden x helyen ugyanaz. Ekkor $\varepsilon = y/x$, tehát a relatív megnyúlás is mindenhol ugyanaz. Ha viszont az F erő x -nek függvénye, például ha az egyik végénél fogva felakasztjuk a szálat, akkor y már integrállal számítandó, mint az előző fejezetben. Az y/x hányados így sem adja a helyi relatív megnyúlást, mert y a teljes x szakasz megnyúlásának függvénye, függ x -től. Ugyanígy, ha jelenleg a gömbre

$$\varepsilon = \frac{R - R_0}{R_0}$$

képletet vennénk (R_0 a kezdő sugár), nem a helyi ε -értéket kapnánk. Tehát mindig az aktuális R helyen kell a relatív megnyúlást számítani:

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R}$$

a helyes. Hasonlóan az előbbieken is adott Δx szakasznak vettük a Δy megnyúlását és így ott

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ valamint } \varepsilon = \frac{F}{EA}.$$

Ha F állandó, ε független a helytől, de x -től függő F esetén

$$\varepsilon = \frac{F(x)}{EA}$$

lesz. Valójában a differencia- és a differenciáhányados fizikailag értelmezett különbségéről van szó. Visszatérve az (1) alapegyenletre, amikor a jelenségben a σ feszültséget a Hooke-törvényből vesszük: $\sigma = \varepsilon E$, az úgy lesz helyes, ha ε -ra való tekintettel infinitezimálisan írjuk fel tetszőleges R helyen és ε -ban R -hez viszonyítunk. Tehát

$$\Delta p_k + \frac{2 \nu \sigma}{R} = \Delta p_b \text{ és } \sigma = E \frac{\Delta R}{R}.$$

Határátmenetben, felhasználva egy függvény differenciáljának felírását, a megoldandó egyenlet végül a következő lesz:

$$p'_k + \frac{2 \nu E}{R^2} = p'_b, \quad (3)$$

ahol a vessző R szerinti deriváltat jelent. A jobb oldali derivált p_b képletéből nyerhető. A már mondottak szerint

$$p_b = \frac{3 p_0 V_0}{4 \pi R^3} \frac{1}{R^3}, \text{ azaz } p_b = \frac{K}{R^3}.$$

(3)-ból a $p_k(R)$ függvény egyszerűen kiintegrálható:

$$p_k = \frac{K}{R^3} + \frac{\nu E}{R} + C,$$

ahol a C állandó a kezdeti feltételekből határozható meg; $R = R_0$, $p_k = p_0 = p_b$. A keresett p_k függvény, ami a probléma megoldása, így szól:

$$p_k = p_0 - K \left(\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{R^3} \right) - \nu E \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right).$$

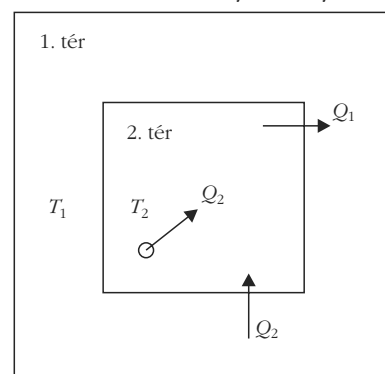
R_0 a sugár kezdő értéke és $R > R_0$, R növekedtével p_k egyértelműen csökken. Fizikailag az inverz függvény bír szemléletes jelentéssel: a leszívással, vagyis p_k csökkentésével a luftballon sugara növekszik.

A háztartási hűtőszekrény energiaviszonyai

A hűtőszekrény működését kell szemügyre venni és a stacionárius állapotot. A hűtő működését a szakirodalom szerint a fordított, reverzibilis Carnot-körfolyamattal modellezzük. Ennek lényege, hogy energiaközlés árán az alacsonyabb hőmérsékletű hőtartályból hőt juttathatunk a magasabb hőmérsékletű hőtartályba. Spontán ez lehetetlen, tiltja a hőtan második főtétele.

Tekintsük a hűtő belső, hűtendő terét. A hűtőszekrényben lévő szerkezet ciklusonként Q_2 hőt vesz ki a hűtött térből és W munka árán $Q_1 > Q_2$ hőt ad le a környezetnek. A mechanikai szerkezet, amely a Carnot-ciklust fenntartja, például egy villanymotor által működtetett kompresszor, amely zárt térben cseppfolyósít és elpárologtat valamilyen freont helyettesítő gázt. Így a Carnot-ciklust végző anyag a gáz, a befektetett W munka a motor által végzett munka. A környezet most az a helyiség, ahol a hűtő áll. (Ne vegyük számításba, hogy a helyiség – például konyha – a falán keresztül termikus kapcsolatban van a T_k állandó hőmérsékletű külső környezettel.) Továbbá vegyük figyelembe, hogy a hűtő hőcserélő bordái annak hátsó falán vannak felszerelve, vagyis a Q_1 hő – a 4. ábra szerint az 1-es jelű térnek – a helyiségnek adódik le. Az ismert termodinamikai számítások szerint a ciklusonként végzendő mechanikai munka: $W = Q_1 - Q_2$, a hűtés jóságai tényezője

4. ábra. A hűtőszekrény és környezete.



$\eta = Q_2/W$. Előírhatjuk a hűtés két jellemző hőmérsékletét. Legyen az egyes tér állandó hőmérséklete T_1 , a kettes téré az állandó T_2 . Ez utóbbit akarjuk fenntartani, a stacionárius állapotot itt kell majd kifejezésre juttatni. Szintén a számítások szerint η kifejezhető az előbbi jellegzetes hőmérsékletekkel:

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (1)$$

A hűtő fala nem tökéletesen hőszigetelt, így az egyes térből, valamelyes hő a Carnot-ciklustól függetlenül a hűtött térbe visszaáramlik. Stacionárius állapot akkor uralkodik a kettes, vagyis a hűtött térben, amikor ciklusonként az abból kivett Q_2 hő a hűtő falán át az egyes térből oda visszaáramlik, miközben az egyes tér Q_1 hőt kap. Mindebből az is látszik, hogy $Q_1 - Q_2$ hő fűti az egyes teret, vagyis éppen a befektetett W mechanikai munka. Ha Q_2 nem áramolna vissza ciklusonként, akkor a hűtött tér hőmérséklete állandóan csökkenne. Ez a visszaáramló hő Newton hőátadási törvényéből számolható:

$$Q_2 = \alpha A (T_1 - T_2) \Delta t, \quad (2)$$

ahol α a hűtő falának hőátbocsátási tényezője, A a hőátadó összes felület, Δt egy ciklus ideje. T_1 és T_2 állandóságát biztosítani kell.

A továbbiak kedvéért fontos megjegyzést kell tennünk. Hangsúlyoztuk, hogy a T_1 hőmérsékletet elő kell írni. De ez azt jelenti, hogy fenn kell tartani. Például télen a helyiséget külön fűtjük, így állítva elő az egyes tér állandó hőmérsékletét. Ezt Newton lehűlési törvénye alapján kiszámolhatjuk. Legyen a fűtőtest, vagy kályha teljesítménye P és a külső környezet állandó hőmérséklete T_k , akkor stacionárius állapotban a helyiség által felvett és leadott teljesítmény egyenlő, amiből T_1 meghatározható: $P = \alpha A (T_1 - T_k)$. Ha például $\alpha = 2 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$, akkor egy 5 méter élű, kocka alakú helyiség 6 kW-os kályhával 0°C hőmérsékletű környezetben 20°C -ra fűthető fel. Továbbá fontos kiemelni, hogy a számolás alapját képező reverzibilis fordított Carnot-ciklus jó tájékozódásra szolgál csupán, mivel a valóságos körfolyamat irreverzibilis. Ezért a reverzibilis tárgyalás közelítő eredményt szolgáltat.

Fontos továbbá, hogy a falak α hőátbocsátási tényezője valójában nem állandó, csak kis hőmérsékleti tartományban vehető állandónak. Hő- és áramlási hasonlósági kritériumok segítségével különféle fizikai szituációkban meghatározható α hőmérsékletfüggése. A jelen helyzetben α a hőmérséklet-különbség negyedik gyökével arányos. Ennek meghatározására a Grashoff-, Nusselt- és a Prandtl-féle hasonlósági kritériumokat kell felhasználni. Mivel α értékét számításainkban állandónak vesszük, az eredmények e tekintetben is közelítő érvényűek.

Ezt a modellt tekintve mekkora hűtést lehet elérni? T_2 -nek van alsó limitje. Egyik tényező α hőmérsékletfüggése. Ha ugyanis $T_1 - T_2$ nagy, úgy α is egyre nagyobb, tehát romlik a hőszigetelés a környezet (a he-

lyiség) és a hűtött tér között. Egészen más technika, amikor megközelítik az abszolút zérus fokot.

E kitérő után határozzuk meg stacionárius állapotban a hűtőgép által befektetendő P mechanikai teljesítményt. Mivel az egy ciklus alatt végzett munka $W = P \Delta t$, továbbá felhasználva a jóság tényező formuláját és Q_2 előbbi képletét,

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{\alpha A (T_1 - T_2) \Delta t}{P \Delta t},$$

másrészt;

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Végül

$$P = \frac{\alpha A (T_1 - T_2)^2}{T_2}.$$

Jól látható, hogy nagyobb hűtés eléréséhez négyzetesen növekvő mechanikai teljesítmény szükséges.

Példaként határozzuk meg a szükséges relatív teljesítménytöbbletet a nyári és téli üzem között, ha a hűtött térben ugyanazt a hőmérsékletet kívánjuk fenntartani. Legyen például T_2 mindig -10°C , vagyis 263 K , míg a helyiségben télen 18°C és nyáron 27°C . Keressük tehát a $\delta = \Delta P/P_1$ hányadost. ΔP előbbi képletéből kapjuk, hogy

$$\Delta P = \frac{\alpha A}{T_2} \left[(T_{12} - T_2)^2 - (T_{11} - T_2)^2 \right],$$

ahol T_{12} és T_{11} T_1 értéke nyáron, illetve télen. Végül a relatív teljesítménytöbblet

$$\delta = \left(\frac{T_{12} - T_2}{T_{11} - T_2} \right)^2 - 1.$$

Numerikusan:

$$\delta = \left(\frac{300 - 263}{291 - 263} \right)^2 - 1 = 74,6\%.$$

A klímaberendezésről

A hűtéshez tartozik egy nálunk is elterjedt eljárás helyiségek hűtésére, illetve klimatizálására. A működés elve itt is a fordított reverzibilis Carnot-ciklus. Most azonban a hőcserélőt – ahol leadódik egy-egy ciklusban az elvont hő – nem a hűtendő helyiségben helyezték el, hanem a lakáson kívül, például a külső falon. Így a gép, rendszerint elektromos energia betáplálásával működő párologtató-áramoltató berendezés a helyiségből elvont hőt a környezetnek adja át, amit állandó hőmérsékletűnek tekintünk. Például a freont helyettesítő gázzal zárt csőrendszerben végez-

tetjük a fordított Carnot-ciklust. E gépek érdekessége, hogy egy kapcsolóval fűtésre is állíthatók. A kapcsolóval ugyanis – a zárt csőrendszerben áramoltatott közeg áramlási irányának megváltoztatásával – a párolgató és az úgynevezett kondenzátor szerepe felcserélődik. Ezáltal a gép a környezettől von el hőt és azt a helyiségnek adja le. A csőrendszerben lévő halmazállapot-változások külső munka árán mennek végbe, és ennek révén jut hő az alacsonyabb hőmérsékletű környezetből a melegebb helyiségbe. De „nem magától” megy végbe e folyamat. A jósági tényező viszont más, mint amikor ugyanezt a gépet hűtésre használjuk. Minket ugyanis fűtéskor nem az elvont Q_2 hő, hanem a leadott Q_1 hő érdekel. A befektetett W munkát ehhez kell viszonyítani. Ezért most a jósági tényező (hatásfok):

$$\eta = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2},$$

átírva:

$$\eta = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

Hűtéskor viszont

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

volt a jósági tényező.

Periodikus hőátadás sík falon keresztül

A probléma egyszerűsített modellen igen szemléletesen tárgyalható, a diszkusszió jól rámutat a jelenség lefolyására.

Gondoljunk egy vékony falu házra, annak egyik szobájára. A fal ugyan téglá, de gyengén tartja a meleget. Ilyen lehet például egy nyaraló. Ez esetben a környezeti hőmérséklet ingadozása a különböző napszakokat tekintve, erősen befolyásolja a szoba belterének hőmérsékletét.

Modellszerűen írjuk le a jelenséget. Tudjuk, a modell akkor jó, ha a jelenség lényeges vonásait tükrözi. Emellett még az is szerencsés, hogy egyszerűbb matematikai tárgyalást tesz lehetővé. Ezért az alábbi feltételeket szabjuk: a hőátmenet a falra merőlegesen történik, akár be, akár kiáramlásról van szó. A fal átbocsátását az α hőátbocsátási tényezővel vesszük figyelembe, ami egyszerre írja le a fal két oldalán a hőátadást és a véges vastagságú falban a hővezetést. Így α megadásával sík, vékony falat tekinthetünk. Úgy vesszük továbbá, hogy a helyiségben bárhol a pillanatnyi hőmérséklet ugyanaz. Ezáltal a hővezetés parciális differenciálegyenlete helyett közönséges differenciálegyenletet kell megoldani. Ha pontosabb elemzést követnénk, arra jutnánk, hogy hőmérsékleti hullámok futnának végig a helyiségen lecsengő amplitúdóval. A

szemközti falról részben visszaverődve, állóhullámhoz hasonló állapot alakulna ki. Ha elég hosszú rúd hővezetését vizsgálánk, ahol visszaverődésről nincs szó, ez a számítás alapját képezné a híres Ångström-féle mérőeljárásnak. Ezzel lehet ugyanis nagy pontossággal mérni fémek hővezető-képességét. De kövesük most az egyszerűbb modellt.

Fűtsük a helyiséget P teljesítménnyel is, legyen a szobában az összes anyag tömege m , az átlagos fajhő c , a hőcserélő-felület A , a szoba pillanatnyi hőmérséklete T . Legyen továbbá T_0 a környezeti alaphőmérséklet és R a környezeti hőmérséklet-ingadozás maximuma. Végül a környezet hőmérsékletét írja le az alábbi, ω frekvenciájú periodikus időfüggvény:

$$T_k = T_0 + R \sin \omega t.$$

Az előbbieket alapján a szoba hőcseréjére felírhatunk egy energiaegyenletet Newton hőátadási törvényének figyelembe vételével:

$$c m dT = -\alpha A [T - T_k(t)] dt + P dt.$$

A szögletes zárójeles kifejezés t -től függően lehet pillanatnyilag pozitív vagy negatív. Ezért lehetséges pillanatnyi hőkiáramlás vagy -beáramlás. A megoldandó differenciálegyenlet:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha A}{c m} [T - (T_0 + R \sin \omega t)] + \frac{P}{c m}. \quad (1)$$

Abban a speciális esetben ha $dT/dt = 0$ feltételt írjuk elő, (1)-ből adódik, hogy P már nem lehet állandó, mert akkor T időfüggetlen lenne, ami a tett feltevessel ellentézik. Ekkor tehát periodikusan kellene fűteni, hogy T állandó legyen. Ha viszont a külső hőmérséklet nem periodikusan változik, tehát $\omega = 0$ is fennáll, P már lehet állandó és kapjuk a közvetlenül is nyerhető T egyensúlyi hőmérsékletet. Ilyenkor – elemi megfontolással – a leadott teljesítmény egyenlő a kimenővel. Ez adódik a mondott feltevessel, ami (1)-ből is következik. Tehát

$$T = T_0 + \frac{P}{\alpha A}.$$

Visszatérve (1) megoldására, átrendezés után a megoldandó differenciálegyenlet:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda T = \gamma + \lambda R \sin \omega t,$$

$$\text{ahol } \lambda = \frac{\alpha A}{c m} \quad (2)$$

$$\text{és } \gamma = \lambda T_0 + \frac{P}{c m}.$$

Megoldás: Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásához hozzá kell adni a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását. Ez utóbbi $T_{hom} = K e^{-\lambda t}$, ahol K egy állandó. A (2) egyenlet egy partikuláris megoldását próbafüggvény alakjában keressük. Legyen ez

$$T_{part} = B \sin \omega t + C \cos \omega t + D, \quad (3)$$

ahol B , C , D meghatározandó állandók. A (3) feltételt a (2) egyenletbe tesszük és együttható összehasonlítással határozzuk meg az előbbi állandókat. Erre nézve egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} B \omega + C \lambda &= 0, \\ C \omega - B \lambda + R \lambda &= 0, \\ D \lambda &= \gamma. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva, kapjuk az előbbi állandók konkrét értékeit:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\lambda^2 R}{\omega^2 + \lambda^2}, \\ C &= -\frac{\lambda \omega R}{\omega^2 + \lambda^2}, \\ D &= \frac{\gamma}{\lambda}. \end{aligned}$$

Stacionárius állapotban (jelenleg hosszú időre nézve) a homogén egyenlet megoldása lecseng és ezért (2) stacionárius megoldása:

$$T = B \sin \omega t + C \cos \omega t + T_0 + \frac{P}{\alpha A}. \quad (4)$$

A (4) megoldás diszkussziója tartalmazza a jelenség érdekességét. Ha az első két tagból kiemelünk $(B^2 + C^2)^{1/2}$ -t, és alkalmazzuk az egyik trigonometrikus addíciós tételt, úgy ismét szinusz-függvénnyel írható le a helyiség periodizáló hőmérséklete. Ez a függvény B , C , D fenti képleteivel ilyen lesz:

$$T = R \frac{\lambda}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \sin(\omega t - \varphi) + T_0 + \frac{P}{\alpha A}, \quad (5)$$

lesz, ahol

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\lambda}.$$

Ezek szerint a helyiségben ugyanazzal a periódussal ingadozik a hőmérséklet, de csökkent amplitúdóval, mivel (5)-ben R szorzója mindig egynél kisebb. Ami külön érdekesség, hogy a fal hatása még abban is jelentkezik, hogy φ fáziskésést hoz létre a hőmérséklet ingadozásában. Minél nagyobb ω , annál nagyobb lesz φ és ugyanakkor annál kisebb a hőmérsékleti amplitúdó. A fal mintegy ellenáll, nem tudja követni az ingadozásokat. Úgy viselkedik, mintha tehetetlensége lenne. Viszont λ által, ha α nagy, érthető módon a belső térben alig csökken a hőmérsékleti amplitúdó és φ is egyre kisebb, vagyis egyre zavartalanabban engedi át a fal a külső ingadozásokat. Végül $\omega = 0$ esetén visszakapjuk az alapesetet, ha a környezeti hőmérséklet állandó.

Ajánlható mérés itt az lehet, hogy a nap folyamán többször mérjük a külső és belső hőmérsékletet. Ezután felvehetünk egy diagramot ezek időfüggésére, így szemléltetve a kétféle amplitúdót és a két, közelítően szinusz-görbe φ szögű eltolódását.

Megjegyzendő, hogy az amplitúdócsökkenés nem a falban lévő energiadisszipáció következménye, azaz nem a fal nyeli el a beáramlott energia egy részét, hanem stacionárius állapotban úgy hat a fal α révén, hogy kevesebb energiát enged át. Más kérdés, hogy külön meghatározható a fal energiasűrűsége. Ugyanakkor a periodizáló hőmérséklettől függetlenül hőátmenet csak hőmérséklet-különbség esetén lehetséges, amit az (1) egyenlet ír le. Jelenleg időfüggő a hőmérsékleti gradiens.

◆

A demonstrációs kísérletek előnyösen tovább fejleszthetők fizikai mérésekké, ahogy erre történt már utalás. Ezáltal tevőlegesen belenyúlunk egy megismerési folyamatba, bár itt sem valami újnak a felfedezéséről van szó, hanem például a vonatkozó törvényekben szereplő paraméterek konkrét méréséről, mint a hőátbocsátási tényező, vagy rugalmas szál vonalsűrűsége. Ha a jelenség időbeli lefolyását vizsgáljuk, akkor a méréssel a folyamat megragadása jelent mélyebb megértést. Tág tere nyílik a különböző szintű megközelítésnek a tanulók tehetsége szerint.

A FIZIKUS KERTJE – AVAGY A MECHANIKA TANÍTÁSÁNAK EGY ÚJ MEGKÖZELÍTÉSE

Baló Péter
Tóth Árpád Gimnázium, Debrecen

Sok éve már, hogy az általános iskolától a középiskolán át az egyetemig ugyanolyan felépítésben tanítják a mechanikát. Kinematikával kezdődik, és ezen belül valamennyi speciális mozgást bemutatják, velük a jellemzésükhöz szükséges fogalmakat és törvényeket is. Ezután következik a dinamika. A magára hagyott test mozgása alapján eljutunk Newton I. törvényéhez. A lendület, a lendületmegmaradás törvénye vezeti be

az erő fogalmát. Megtárgyalják az egyes erők erőtvényét, majd Newton II. törvénye segítségével megkezdődik a mozgások dinamikai tárgyalása. Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás, szabadesés, hajítások, egyenletes körmozgás – megannyi speciális eset, amelyek elemzéséhez a már megtárgyalt kinematikai ismeretekre lenne szükség. Mivel a diákok régebben tanulták és túl sok a hozzájuk tartozó for-