



5. ábra

A napelemek fejlődésének is köszönhető, hogy a Rosetta üstökös-kutató és a Juno Jupiter-kutató szondák energiáját is napelemek szolgáltatják.

Forrásanyagok

- [1] Inzelt György: Űreszközök áramforrásai, a Természet Világa 2001. januári számában megjelent cikk elektronikus változata
- [2] Glenn T. Seaborg, William R. Corliss: Omul și atomul, Editura Științifică, București, 1974
- [3] K. N. Muhin: Fizica nucleară experimentală, Volumul I, Editura Tehnică, București, 1974
- [4] Vermes Miklós: A természet energiái, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964

Ferenczi János, Nagybánya

Számítógépes grafika

XVIII. rész

A fraktálok világa

A *fraktálok* *önhasonló*, végtelenül komplex matematikai alakzatok, amelyek változatos formáiban legalább egy felismerhető (tehát matematikai eszközökkel leírható) ismétlődés tapasztalható. Az elnevezést 1975-ben Benoît Mandelbrot adta, a latin *fractus* (vagyis törött; törés) szó alapján, ami az ilyen alakzatok tört számú dimenziójára utal. „A természet geometriájának fraktál arculata van.” – vallotta Mandelbrot.

Az ön hasonlóság azt jelenti, hogy egy kisebb rész felnagyítva ugyanolyan struktúrát mutat, mint egy nagyobb rész. Ilyen például a természetben a villám mintázata, a levél erezete, a felhők formája, a hópehelyek alakja, a hegyek csipkézete, a fa ágai, a hullámok fodrozódása és még sok más. „*Hogy fölfrissülj a nagy Egészben, lásd meg az Egészben minden kicsi részben.*” – írta Goethe.

A fraktál szóval rendszerint az ön hasonlító alakzatok közül azokra utalunk, amelyeket egy matematikai formulával le lehet írni, vagy meg lehet alkotni.

A generatív számítógépes grafikában fraktálok segítségével tudunk leírni olyan objektumokat (pl. felhők, hegyek, növények stb.), amelyek egyszerű geometriai formáknak nem felelnek meg.

Matematikailag a fraktál egy olyan halmaz, amelynek a *fraktál dimenziója* nagyobb a topológiai dimenziójánál (törtdimenziós).

Az euklideszi geometriában egy alakzat térbeli kiterjedtségét egy pozitív egész szám, az ún. *dimenzió* jellemzi. A pontnak nincs kiterjedése, tehát a dimenziója 0. Az egyenes egydimenziós, mivel egyetlen irány szerinti kiterjedése mérhető. Egy síkidomnak a síkbeli kiterjedése két egymásra merőleges irány mentén mérhető (két dimenziós). A bennünket körülvevő világ háromdimenziós, a matematikában pedig több dimenzió is létezik.

Egy H halmaz *topológiai dimenziója* k , ha minden pontjának van olyan tetszőlegesen kis környezete, aminek a határa H -ban egy $k-1$ dimenziós halmaz és k a legkisebb ilyen tulajdonságú nemnegatív egész.

A topológiai dimenzió mindig egész szám.

Szigorúan önhasonló halmazok összetettségének jó mérőszáma az ún. *hasonlósági dimenzió*. Ha f_1, \dots, f_n hasonlósági transzformációk, amelyeknek hasonlósági tényezői r_1, \dots, r_n számok és K az (f_1, \dots, f_n) függvényrendszer invariáns halmaza, akkor azt a pozitív s számot, amelyre teljesül az $r_1^s + \dots + r_n^s = 1$ egyenlőség, a K halmaz hasonlósági dimenziójának nevezzük.

Azt is mondhatjuk, hogy a dimenzió azt jelenti, hogy milyen hatvány szerint aránylik a méret a nagyításhoz.

Tegyük fel, hogy a H halmaz N darab hasonló részből áll, amelyek s -szeres ($s < 1$)

nagyításai H -nak. Ekkor: $D(H) = \frac{\log N}{\log s}$

Induljunk ki egy szakaszból. Ha az eredeti szakaszt az N -ed részére kicsinyítjük (skálázzuk), akkor ebből az új szakaszból pontosan N (vagyis N^1) darabra van szükség, ha le akarjuk fedni velük az eredeti szakaszt. Ha egy négyzetet kicsinyítünk az N -ed részére, akkor pontosan N^2 darab, kocka esetén N^3 darab kicsinyített másra van szükségünk. Könnyen észrevehetjük, hogy a kitevőben lévő szám az objektum euklideszi (vagy topológiai) dimenziójával egyezik meg. Ha a kitevő értéke valós szám, tetszőlegesen önhasonló alakzat dimenziója kiszámítható az alábbi módon:

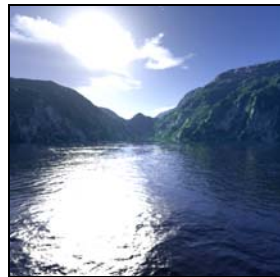
$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

ahol $N(\varepsilon)$ darab méretű alakzatra (az eredeti objektum skálázott változataira) van szükség a teljes, eredeti objektum letakarásához. Az így bevezetett dimenzió-fogalom a *Hausdorff-dimenzió*.

Fraktálokra jellemző az ún. *box-dimenzió* (vagy *doboz-dimenzió*) is.

A box-dimenzió meghatározásához egy négyzetrácsot (magasabb dimenzióban kockarácsot stb.) kell a vizsgált alakzatra helyezni.

Ezután meghatározzuk azon cellák minimális számát, amelyek segítségével az alakzatunk lefedhető. Ha ezzel megvagyunk, finomítsuk a rácsot, használjunk például fele-



1. ábra

Fotorealisztikus táj – fraktálok segítségével

akkora cellaméretet, mint kezdetben. A lefedéshez szükséges cellák száma így nyilvánvalóan megnő, számunkra most az az érdekes, hogy mennyivel. Egy egyenes szakasz esetében fele akkora cellákból kétszer annyira, míg síkidomok esetén négyszer annyira lenne szükség.

Jelöljük N -nel egy adott alakzat lefedéséhez szükséges cellák számát és jelölje r az alkalmazott cellaméretet. Ekkor a következő összefüggés érvényes: $N = r^{-D_B}$, ahol a kitevőben szereplő D_B -t az alakzat *box-dimenziójának* nevezzük.

Rendezve az egyenletet:

$$D_B = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$$

Előnye, hogy nem szükséges egzakt önhasonlóság a használatához, így akár ún. *önaffin alakzatok* dimenziójának mérésére is felhasználható.

Lineáris fraktálok

A *Cantor-halmaz* megszámlálhatatlanul (végtelenül) sok pontból álló halmaz, amelynek a teljes hossza 0 (Cantor-por, 1877).

Hány dimenziós a Cantor-halmaz? Nem 1 dimenziós, mert nincs hossza, de nem is 0 dimenziós, mert a pontok kontinuumot alkotnak.

A Cantor-halmaz dimenziója: $D = \ln(2)/\ln(3) \cong 0,6309$.

Iteratíván így állíthatjuk elő a Cantor halmazt: vegyünk egy n hosszúságú szakaszt (1. lépés), rajzoljuk ki (2. lépés), osszuk fel három egyenlő részre (3. lépés), tartsuk meg az első részt és az utolsót, a középsőt pedig vessük el (4. lépés), egy adott iterálási értékig folytassuk a 2. lépéstől az első és az utolsó megmaradt szakaszra.

A *Koch-görbét* Helge von Koch svéd matematikus 1904-ben példaként hozza fel olyan görbére, amelynek semelyik pontjába nem húzható érintő. Dimenziója kb. 1,261.

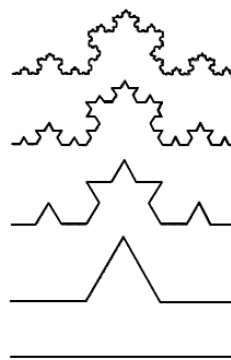
A *Sierpinski-szőnyeget* 1915-ben alkotta meg Waclaw Sierpiński, lengyel matematikus. Az alakzatban harmadakkora részekből nyolcat hagyunk meg, így a szőnyeg dimenziója: $\ln(8)/\ln(3) = 1,8928$. Háromszög alakú változata a *Sierpinski-háromszög*, 3D változata a *Menger-szivacs*.

Iteratíván így tudjuk előállítani a Sierpinski-háromszöget:

- Vegyünk egy tetszőleges méretű szabályos háromszöget. Rajzoljuk be a középvonalait.



2. ábra. A Cantor-por



3. ábra. A Koch-görbe iteratív generálása

- Ezek a szakaszok 4 kisebb (egybevágó) háromszögre osztják fel az eredetit. Ezek közül:
 - o távolítsuk el a középsőt. A maradék hárommal ismételjük meg a fentieket.
- Egy elég nagyszámú iterációs lépés után az eredmény a Sierpinski-háromszög lesz.



4. ábra

A Sierpinski-szőnyeg, háromszög, valamint a Menger-szivacs

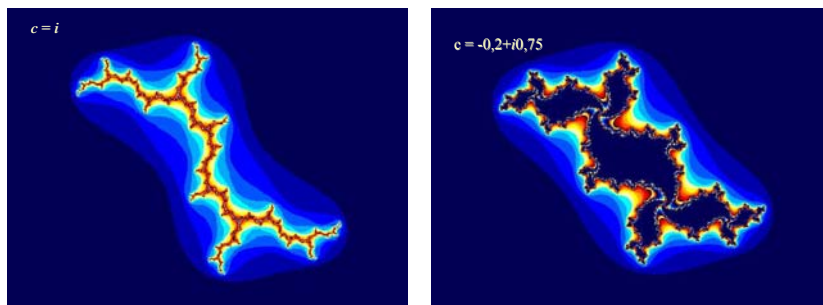
A fent említett fraktálok az ún. *lineáris fraktálok*. A fraktálok úgy generálhatók, hogy az önhasonlóságot jellemző mintázatot ismételjük egyre kisebb méretarányokban (azaz nagyobb felbontásban). Ha az egyes felbontások között az átmenetet affin transzformációkkal képezzük, akkor lineáris fraktálokat kapunk.

Komplex fraktálok

Ha az egyes iterációs lépésekben nem lineáris leképzést alkalmazunk, akkor nem lineáris fraktálokat kapunk eredményül.

A *Julia-halmazok* azon z komplex számok halmazai, amelyekre a $z_0 = z, z_{i+1} = z_i^2 + c$ iteráció eredménye nem a végtelenbe konvergál (c itt egy komplex paraméter, azaz minden c -hez tartozik egy Julia-halmaz).

Gaston Julia (1893–1978) francia matematikusról kapták a nevüket, aki 1918-ban megjelent munkájában ismertette őket.

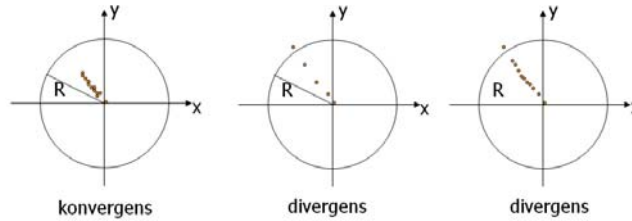


5. ábra

Julia-halmaz a $c = i$, valamint a $c = 0,2 + i0,75$ konstansokra

A Mandelbrot-halmaz azon c komplex számok halmaza, amelyekre a $z_0 = 0, z_{i+1} = z_i^2 + c$ iteráció eredménye nem a végtelenbe konvergál. ($|c| \leq 2$)

A fekete–fehér Mandelbrot-halmazt könnyű kirajzolni, hisz a fenti definíció értelmében szinte egyértelműen adódik az algoritmus (ábrázoljuk a c komplex számot az x, y koordináták segítségével).



6. ábra

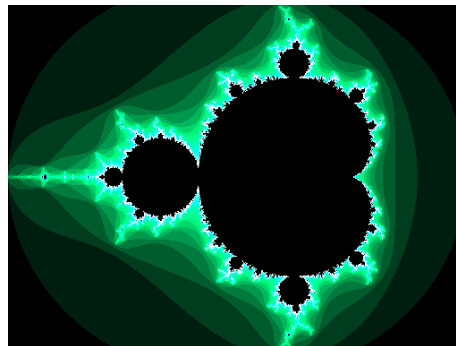
Konvergencia és divergencia

A színes Mandelbrot-halmaz megvalósításához értelmezzük először a *divergencia* fogalmát.

Definiáljunk egy kört: $x^2 + y^2 = R$, iteráljunk az (x_0, y_0) pontból kiindulva K szor, ha egy pont a körön kívülre kerül, akkor divergens, különben konvergens.

A divergencia fogalmának ismeretében definiáljuk a *szökési idő* fogalmát: azon L lépésszám, amikor egy pont a körön kívülre kerül. Minél kisebb az L , a pont annál gyorsabban kerül a végtelenbe.

Minden ponthoz rendeljünk hozzá egy szintet az L szökési idő függvényében, és megvan a színes Mandelbrot-halmazunk.



7. ábra

Mandelbrot-halmaz

L-System fraktálok

1968-ban Aristid Lindenmayer, magyar származású elméleti biológus és botanikus alkotta meg a róla Lindenmayer-rendszernek, röviden L-Systemnek nevezett formális leírási módszert. Különböző növények növekedését vizsgálva rájött, hogy közülük igen sok leírható néhány egyszerű formális szabállyal. Ehhez csak egy megfelelő generatív grammatikát kell rögzíteni.

Egy generatív grammatika a $G = \langle N, T, S, P \rangle$ rendezett négyes, ahol:

- N : ábécé, változók halmaza (nemterminálisok)
- T : konstansok (terminálisok) halmaza



8. ábra

A Barnsley-páfrány

- S : kezdőszimbólum
- P : levezetési szabályok halmaza

Például a Koch-görbét a következőképpen lehet leírni:

- változók: S
- konstansok: $+$, $-$
- kezdőszimbólum: S
- szabályok: $S \rightarrow S+S-S-S+S$

Az S rajzolást, a $+$ jel kilencven fokkal balra, a $-$ jel pedig kilencven fokkal jobbra történő fordulást jelent.

A Barnsley-páfrányt így írhatjuk le:

- változók: S, F
- konstansok: $+$, $-$, $[$, $]$
- kezdőszimbólum: S
- szabályok: $S \rightarrow F-[[S]+S]+F[+FS] -S, F \rightarrow FF$
- fordulási szög: 25°

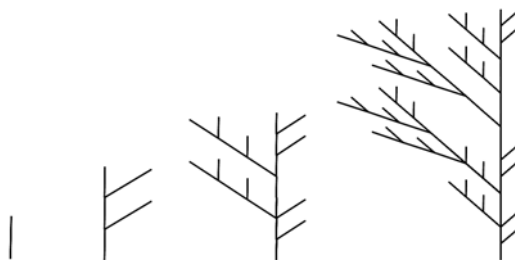
Az F rajzolást, a $-$ jel adott szöggel balra, a $+$ jel jobbra fordulást jelent. Az S -hez semmilyen rajzadási művelet nem kapcsolódik, a szerepe a különleges forma kialakításában van. A $[$ menti az aktuális pozíció és szög értékeket, amelyek a $]$ jellel visszatölthetők.

Speciális L-System fraktálok a *graftálok*. A *graftálok* egyszerű szabályokból iteratív eljárással létrehozott alakzatok, amelyek növényeket modelleznek.

- Legyen egy négy jelből álló nyelv: $0, 1, [,]$.
- A $[-$ mindig követi egy $]$, a $]$ előtt mindig áll egy $[$.
- A $[]$ páros között egy vagy több jel is állhat.
- A 0 és 1 jelentése: lépj előre egy egységnyit.
- A $[$ jelentése: jegyezd meg az aktuális pozíciót és irányt, majd fordulj el meghatározott szöggel.
- A $]$ jelentése: menj vissza és fordulj a legutóbb megjegyzett pozícióba és irányba.

A graftál iterálása (pl.):

- Cseréljük ki minden 0 -át $1[0]1[0]0$ -ra.
- Cseréljük ki minden 1 -et 11 -re.



9. ábra
Példa graftálra

IFS fraktálok

Az IFS az *Iterated Function System* (iterált függvényrendszer) kifejezés rövidítése. Egy IFS nem más, mint kontraktív, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ alakú transzformációk kollekcója, mely szintén egy leképezés. Az ilyen típusú leképezéseknek mindig van egy egyedi fixpontja, digitális képekre alkalmazva ez a fixpont általában egy fraktálkép. IFS-sel előállítható a fent említett fraktálok nagy része, pl: Cantor-halmaz, Sierpinski-háromszög, és -szőnyeg, Koch-görbe.

1988. Barnsley kidolgozott egy módszert, amely digitális képek jó hatásfokú tömörítését tette lehetővé IFS-ek felhasználásával.

A Barnsley-páfrányt úgy állíthatjuk elő IFS-ként, hogy kiindulunk az origóból ($x_0 = 0, y_0 = 0$), kirajzoljuk a pontot, majd véletlenszerűen alkalmazunk egy transzformációt a következő négyből (pl. 300 000-szer), a kapott új pontokat kirajzoljuk:

1. $\begin{cases} x_{n+1} = 0 \\ y_{n+1} = 0,16 \cdot y_n \end{cases}$, ezt a transzformációt 1%-os valószínűséggel alkalmazzuk.
2. $\begin{cases} x_{n+1} = 0,2 \cdot x_n - 0,26 \cdot y_n \\ y_{n+1} = 0,23 \cdot x_n + 0,22 \cdot y_n + 1,6 \end{cases}$, 7%-os valószínűséggel.
3. $\begin{cases} x_{n+1} = -0,15 \cdot x_n + 0,28 \cdot y_n \\ y_{n+1} = 0,26 \cdot x_n + 0,24 \cdot y_n + 0,44 \end{cases}$, 7%-os valószínűséggel.
4. $\begin{cases} x_{n+1} = 0,85 \cdot x_n + 0,04 \cdot y_n \\ y_{n+1} = -0,04 \cdot x_n + 0,85 \cdot y_n + 1,6 \end{cases}$, 85%-os valószínűséggel.

A „káosz-játék” fraktálok

A „káosz-játék” fraktálok előállításának egy „játékosabb módja”, például a Sierpinski-háromszög előállítható a következőképpen:

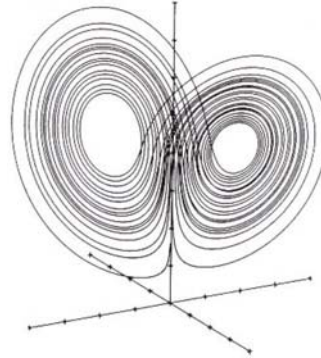
- Vegyünk fel három pontot a síkban úgy, hogy azok egy egyenlő szárú háromszög csúcsait határozzák meg.
- Címkezzük fel ezeket a pontokat az 1, 2, 3 számokkal. Ezeket bázisoknak fogjuk hívni.
- Ezután kezdetét veszi a játék. Vegyünk fel egy tetszőlegesen kiválasztott pontot a három bázispont által meghatározott háromszögön belül. Ezt játékpontnak fogjuk nevezni. Majd újabb és újabb pontokat veszünk fel, a következő szabály szerint: sorsoljunk véletlenszerűen egy 1 és 3 közötti számot.
- Tegyük fel, hogy a kisorsolt szám az x volt. Ekkor kössük össze képzeletben a játékpontunkat az x címkejű bázisponttal, és vegyük fel új játékpontként az így kapott szakasz felezőpontját.
- Ha elegendően sok pontot vettünk fel, akkor tisztán felismerhető lesz a Sierpinski-háromszög jellegzetes alakja.

Különös attraktorok

Edward Lorenz, amerikai meteorológus 1963-ban egy egyszerű időjárás modell felállításával próbálkozott. Az alábbi egyenletrendszert vizsgálta:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = r|x - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

Észrevette, hogy $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ paraméterek mellett kis kezdeti feltételekbeli különbség esetén is igen eltérő időfejlődés tapasztalható. Amikor a rendszer viselkedését fázistérben ábrázolta, egy igen furcsa attraktor képe bontakozott ki a szeméi előtt. Ez a róla Lorenz-attraktornak elnevezett különös ábra azóta a káosz egyik jelképévé vált.



10. ábra.
A Lorenz-attraktor

Véletlen fraktálok

Láttuk, hogy már az IFS-fraktáloknál nagy szerepe van a véletlennek, a valószínűségnek: a megadott transzformációkat csak egy bizonyos valószínűséggel alkalmazzuk.

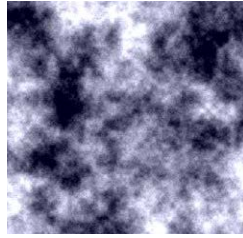
A valóságmodellezéskor is nagy szerephez jutnak a véletlen fraktálok, hisz a természet alkotta valós objektumok nem teljesen szabályosak.

A véletlen fraktálok vagy véletlen halmazokból veszik fel értékeiket, vagy egy generált véletlen-számmal perturbáljuk a fraktál értékét, vagy valamilyen más szinten kötődnek a véletlenhez, pl. a Brown-féle mozgás pályájának a fraktál jellegű tulajdonságait használjuk fel.

A valóság modellezésében felületeket, felhőzetet, atmoszférikus effektusokat stb. nagyon jól elő tudunk állítani Perlin-zaj alkalmazásával.

Perlin zajfüggvénye R^n -en értelmezett ($f: R^n \rightarrow [-1, 1]$), az egész számokban csomópontokat képző rácshoz igazított pszeudo-véletlen spline függvény, amely a véletlenszerűség hatását kelti, de ugyanakkor rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy azonos bemeneti értékekre, azonos függvényértéket térít vissza. A gyakrabban használt n értékei 1 – animáció esetén, 2 – egyszerű textúrák, 3 – bonyolultabb 3D textúrák, 4 – animált 3D textúrák (pl. mozgó felhők).

A következőképpen generálhatunk Perlin-zajt: adott egy bemeneti pont. Minden környező rács-csomópontra választunk egy pszeudo-véletlen értéket egy előre generált halmazból. Interpolálunk az így megkapott csomópontokhoz rendelt értékek között, valamilyen S görbét használva (pl. $3t^2 - 2t^3$).



11. ábra

Felhőzet Perlin-zajjal

Ha a Perlin-zajfüggvényt kifejezésben használjuk, különböző procedurális mintákat és textúrákat hozhatunk létre.

Ha ezeket a kifejezéseket fraktál-összegben használjuk, minden iterációban új adatot vihetünk be, amely valamilyen módon befolyásolja a teljes képet. Például domborzat generálás esetén, az iteráció során a fraktál dimenzióját akarjuk befolyásolni, azaz minden iterációban az amplitúdót osztani fogjuk egy bizonyos értékkel.

Kovács Lehel



Tények, érdekességek az informatika világából

- Ha állásinterjúra jelentkezik valaki a Google vagy Microsoft cégekhez, a szokásos, szakmai tudást felmérő kérdéseken túl szokatlan, de érdekes kérdésekkel is találkozhat, amelyekkel arra kíváncsi a kérdező, hogy mennyire optimálisan (adott esetben mennyire költséghatékonyan) közelíti meg a munkavállaló az adott problémát.
- Miért kerek a csatornafedél? (a Microsoft egyik kérdése)

A hagyományos fedél azért kerek, hogy ne essen bele a lyukba. A fedeleket rendszerint úgy tervezik, hogy a teherautók súlyát is elbírják, ezért rendkívül nehezek. Ha egy fedelet beleejtünk egy lyukba, miközben megpróbáljuk a helyére tenni, nemcsak megrongálhatunk valamit, hanem a fedelet is nehezen tudjuk felhozni. Ha a nyílás és a csatornafedél alakja kerek, nem lesz ilyen problémánk. Akárhogy forgatjuk, a fedél nem esik bele az aknába. Ha a négyszögletes fedelet megfelelő szögben tartjuk, leejtethetjük. A körhöz hasonlóan pl. az egyenlő oldalú háromszög alakú fedelet sem lehet a lyukba ejteni, egy ilyen aknába viszont nehéz lemászni. A kerek fedél azért is előnyös, mert sarkok híján könnyebb a helyére tenni. A kerek fedél nehezebben rongálódik meg, mint az, amelyiknek hegyes csúcsai vannak.
- Ha 1 centi magas lennél (a méreteddel arányosan csökkentett tömeggel) és bedobnának egy üres turmixgépbe ahol a pengék 60 másodperc múlva mozogni kezdenének, mit tennél? (a Google egyik kérdése)