

Megoldott feladatok

Fizika

F.L.145. Igazoljuk, hogy az m_1 , m_2 és m_3 tömegű égitest relatív helyzete nem változik a gravitációs erő hatására, ha egy l oldalélű egyenlő oldalú háromszög csúcaiban található és a tömegközéppont körül adott szögsebességgel forognak. Határozzuk meg a szögsebességet és a rendszer teljes energiáját, ha a tömegközéppont nyugalomban van.

Megoldás:

A három, gravitációs kölcsönhatásban levő (m_i : $i=1, 2, 3$) tömegű égitestnek a viszonylagos nyugalomban levő O tömegközépponthez viszonyított helyzetvektora (\mathbf{r}_i : $i=1, 2, 3$). Tehát:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (1)$$

Mivel a tömegpontok egy l oldalélű egyenlő oldalú háromszög csúcaiban találhatók:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| = l \quad (i \neq k = 1, 2, 3)$$

Az m_1 tömegű égitestre ható eredő gravitációs erő:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1g} &= \mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{1,3} = K \frac{m_1 m_2}{l^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + K \frac{m_1 m_3}{l^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = \\ &= K \frac{m_1}{l^3} [m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 - (m_2 + m_3) \mathbf{r}_1] \end{aligned}$$

Felhasználva az (1) összefüggést:

$$\mathbf{F}_{1g} = -K \frac{m_1 (m_1 + m_2 + m_3)}{l^3} \mathbf{r}_1$$

Ha a rendszer ω szögsebességgel forog a tömegközéppont körül a háromszög síkjában, akkor az előbbi testre „ható” centrifugális tehetetlenségi erő:

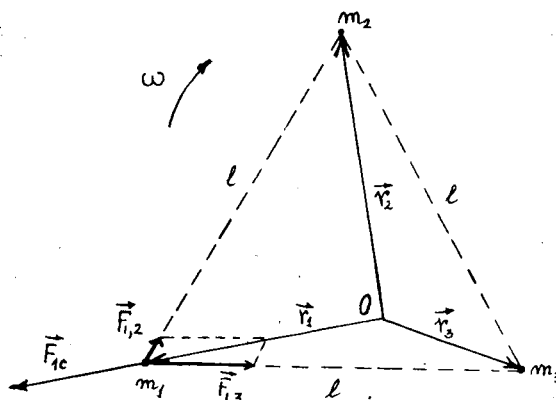
$$\mathbf{F}_{1c} = m_1 \omega^2 \mathbf{r}_1$$

és az egyensúlyi $\mathbf{F}_{1g} + \mathbf{F}_{1c} = 0$ feltételből következik, hogy:

$$\omega = \sqrt{K \frac{m_1 + m_2 + m_3}{l^3}} \quad (2)$$

A rendszer összenergiája az

$$E_{\text{moz.}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^3 m_i l^2$$



mozgási energiából és az

$$E_{\text{pot.}} = E_{1,2} + E_{2,3} + E_{1,3} = -\frac{K}{l} (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3)$$

gravitációs potenciális energiából tevődik össze. A mozgási energiát a következőképpen számoljuk: $E_{\text{mozg.}} = \frac{\omega^2}{2} I$, ahol:

$$I = \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 = \frac{1}{M} \sum_{i,k=1}^3 m_i m_k r_i^2 = \frac{1}{M} \sum_{i,k=1}^3 m_k m_i r_k^2 = \frac{1}{2M} \sum_{i,k=1}^3 m_i m_k (r_i^2 + r_k^2)$$

$$M = \sum_{i=1}^3 m_i$$

Az (1) összefüggésből következik, hogy: $\sum_{i,k=1}^3 m_i m_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k = 0$

és az „I” kifejezése a következőképpen alakul:

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{i,k=1}^3 m_i m_k (r_i^2 - 2 \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k + r_k^2) = I = \frac{1}{2M} \sum_{i,k=1}^3 m_i m_k (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)^2 =$$

$$= \frac{l^2}{M} \sum_{i,k=1}^3 m_i m_k$$

Tehát (2) alapján:

$$E_{\text{mozg.}} = \frac{\omega^2 l^2}{2M} \sum_{i,k=1}^3 m_i m_k = -\frac{K}{2l} (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3)$$

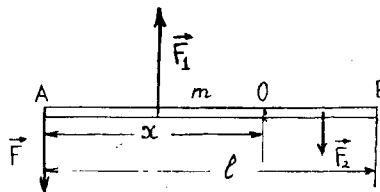
és a rendszer teljes energiája:

$$E = E_{\text{mozg.}} + E_{\text{pot.}} = \frac{K}{2l} (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3) < 0!$$

F.L.146. Az AB egyenes homogén, m tömegű rúd vízszintes síkon található, amellyen a súrlódási együttható μ . Határozzuk meg azt a rúd A végében ható legkisebb vízszintes és a rúdra merőleges irányú erőt, amellyel a rudat elmozdíthatjuk.

Megoldás:

Az AB rúd hossza legyen l . A mozgás egy elfordulás lesz a rúdon elhelyezkedő O forgásközéppont körül, amely az A végponttól $OA = x < l$ távolságra van. Az A végpontban ható külső F erő hatására az OA ill. OB szakaszokon fellépő súrlódási erő legyen F_1 ill. F_2 . Az erők és nyomatékaik egyensúlyának feltételei:



$$F - F_1 + F_2 = 0; \quad xF - \frac{x}{2} F_1 - \frac{1-x}{2} F_2 = 0$$

Mivel $F_1 = \mu m g \frac{x}{l}$, $F_2 = \mu m g \frac{1-x}{l}$, az alábbi egyenletrendszer:

$$F = \mu m g \frac{x}{l} - \mu m g \frac{1-x}{l}$$

$$xF = \mu m g \frac{x^2}{2l} + \mu m g \frac{(1-x)^2}{2l}$$

megoldása: $x = \frac{\sqrt{2}}{2} l$ $F = (\sqrt{2} - 1) \mu m g$

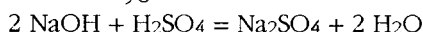
Kémia

K.G. 174. 150g 15%-os kénsav oldatot 150g 15%-os NaOH oldattal kevertek össze. Milyen kémhatású az elegy? Válaszodat igazold számítással.

Megoldás:

$$m_{\text{H}_2\text{SO}_4} = m_{\text{NaOH}} = 150 \cdot 0,15 = 22,5\text{g}$$

$$n_{\text{H}_2\text{SO}_4} = \frac{22,5}{98} = 0,23 \text{ mol} \quad n_{\text{NaOH}} = \frac{22,5}{40} = 0,56 \text{ mol}$$



$$n_{\text{NaOH}} > 2 n_{\text{H}_2\text{SO}_4}$$

Tehát a NaOH feleslegben van a keverékben, ezért az oldat lúgos kémhatású.

K.L. 242. 42,8% szenet, 2,4% hidrogént, 16,66% nitrogént találtak egy egygyűrűs oxigéntartalmú aromás vegyületben, amely katalikus klórozással csak egy monoklór származékot eredményez. Milyen térfogatú (107°C -ú, 5 atm. nyomású) hidrogéngázzal redukálható a vegyület 3,36g-ja. ($748,64 \text{ cm}^3$)

Megoldás:

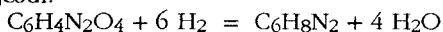
C:H:N:O tömegarányok: 42,8; 2,4; 16,66; 38,14

Mólarányok: $42,8/12 : 2,4/1 : 16,66/16 : 38,14/14 = 3 : 2 : 1 : 2$

Tapasztalati képlet: $(\text{C}_3\text{H}_2\text{NO}_2)_n$; molekulaképlet: $\text{C}_6\text{H}_4\text{N}_2\text{O}_4$

Mivel egy gyűrűs aromás, az $n = 2$

A T.E. = 6, tehát dinitroszármazék. Amennyiben csak egy monoklór származék nyerhető belőle, az aromás gyűrű nem szubsztituált négy C-atomja azonos értékű kell legyen. Ez a feltétel csak az 1,4-dinitro-benzol(A) (para-izomér) esetén teljesül.



$$M_A = 168, \quad v_A = \frac{3,36}{168} = 0,02 \text{ mol} \quad v_{\text{H}_2} = 6 v_A = 0,12 \text{ mol}$$

Az adott körülmények között a H_2 térfogata az általános gáztörvény segítségével számolva: $V_{\text{H}_2} = \frac{0,12 \cdot 22,4 \cdot 380}{5 \cdot 273} = 0,7483 \text{ dm}^3$