

# A metakognícióelmélet 21. századi szerepvállalásáról – a számolási készség metakognitív és nem metakognitív komponenseinek példáján

*A metakogníció jelenségvilágának tanulmányozása lendületes és pedagógiai szempontból is ígéretes vállalkozásként indult a múlt század utolsó évtizedeiben. Az alapkészségek, így a számolás és az olvasás területén végzett fejlesztő munka számára új meglátásokat eredményezhet a metakogníció 21. századi elméleteinek és a gyarapodó empirikus eredményeknek a szintézise.*

Tanulmányomban egy látszólag szűk és tantárgyspecifikus témakörben fejtem ki nézeteimet a metakogníció gondolkodásfejlődésben és -fejlesztésben betöltött szerepéről. Ez a bizonyos szűk és tantárgyspecifikusnak ható terület a magyar szakirodalomban legtöbbször *számolási készség* megnevezéssel fordul elő, de ide tartoznak az *aritmetikai gondolkodás* és a *számfogalom* kifejezések is. A témaválasztást az indokolja, hogy a metakogníció-elmélet hazai befogadását – bár határozottan növekvő számú publikáció kíséri – nehezíti az a körülmény, hogy néhány alapvető kérdés a nemzetközi szakirodalomban megválaszolatlan maradt az elmúlt évtizedekben. Anélkül folytak empirikus és elméleti kutatások, hogy a flavelli kiinduló fogalmat (Flavell, 1979), a Nelson–Narens-i kétszintű modellt (Nelson és Narens, 1990; Nelson, 1996) összekapcsolták volna a metakogníció kognitív fejlődésben játszott szerepének vizsgálatával. Leegyszerűsítve a problémateret: kutatások százai, ezrei születtek olyan elrendezés mellett, hogy vették a metakogníció egy vagy több mérőeszközét, és azokat összefüggésbe hozták a tanulói teljesítmény további mérőeszközeivel. Nem térek ki most rá, de monográfiámban (Csikos, 2007) már megemlítettem, legutóbb pedig (Csikos, 2022) kissé részletesebben kifejtettem: alapvető validitási problémák vannak „a metakogníció” mérőeszközeivel, amely validitási problémák úgy oldhatók fel, ha nem „a metakogníció”, hanem valamely szűkebb metakognitív terület mérésére használjuk az eszközöket, és ezáltal az eredmények értelmezése árnyaltabb, megalapozottabb lehet.

A számolási készség kutatásában világszerte összegyűlt annyi empirikus eredmény, hogy azok felhasználásával ennek az alapkészség-rendszernek a példáján esély nyílik a metakogníciónak a gyermeki gondolkodás fejlődésében betöltött szerepét modellezni. Jelentős motívumként járult hozzá a kihívás elfogadásához, hogy 2012-ben a világ legregibb tudományos folyóiratában, a *Transactions of the Royal Society*-ben új, a korábbi nelsoni modellt kiterjesztő, többdimenziós modell jelent meg (Fleming, Dolan és Frith,

2012). Két további impulzus segítette gondolatmenetem fejlődését, különös tekintettel a pedagógiai relevanciára. Leahy és Harris (1993) felvetették, hogy a kognitív fejlődés egyik záloga lehet, ha korábban még tudatos folyamatok intuitívvá, automatikussá válnak. Kevésbé explicit módon, de a nyelvhasználat kapcsán hasonló értelmű kijelentést tett korábban Sternberg (1985). Ez a felvetés jócskán különbözik attól az elvtől, amelyet metakogníció-monográfiámban – kissé gunyorosan – a fejlődés „szép” elméleteinek neveztem, vagyis amikor a kognitív teljesítménnyel együtt egyre magasabb szintű metakogníció figyelhető meg. Afflerbach, Pearson és Paris (2008) tanulmánya az olvasási készségek és olvasási stratégiák fogalmi tisztázásáról fölvetette, hogy egyes olvasási folyamatok automatizálódásának elmaradása vagy akadálya esetén szerepet kapnak tudatos, kompenzáló olvasási stratégiák, azaz az olvasási stratégiák nem feltétlenül az olvasási képesség érett, befejező szakaszának folyamatai, és nem feltétlenül jelzik a magas szintű olvasási teljesítményt. Mindezek együtt annak felismeréséhez vezetnek, hogy az alapkészségek fejlődésében a kezdetektől jelen vannak metakognitív és nem metakognitív folyamatok egyaránt; a fejlődés záloga pedig az lehet, hogy a korábban metaszinten használt folyamatok beépülnek a készségfejlődés automatizmusába, teret engedve így újabb metaszintű folyamatoknak.

Tanulmányomban a számolási készség és a számfogalom fejlődése példáján igyekszem megmutatni, az évtizedek óta rendelkezésre álló, megbízható és reprodukálható mérőeszközökkel született kutatási eredmények hogyan egyeztethetők össze a metakogníció-elmélet 21. századi fejleményeivel.

### Mi is az a metakogníció?

Alan Schoenfeld (1993) tanulmányát (*What's all the fuss about metacognition?*) ezzel a címmel fordította le Dobi János. A fordítás akár merészebb is lehetett volna, figyelembe véve, hogy a laza szemantikai körülírásokat – például kognícióra vonatkozó kogníció, tudásra vonatkozó tudás – alig meghaladó definíciók uralják jelenleg is a szakirodalmat.

Nagy József munkáiban viszonylag kevészer szerepel utalás a metakogníció-elméletre. Személyes beszélgetéseink során egyszer-kétszer adódott alkalom arra, hogy kifejtse, miért alakult ez így. Nemrég elkészült elméleti tanulmányom (Csikos, 2022) – mint félrecsúszott nyakkendő évekkel később – reflektál arra a kérdésre, amelynek megválaszolatlansága talán leginkább akadálya volt annak, hogy a metakogníció fogalma meggyökeresedjen a Nagy József-i terminológiákban. Úgy vélem, elsősorban azért berzenkedett a metakogníció fogalom kiterjedt használata ellen, mert a nagy általánosságban még logikusnak látszó elmélet rögtön megbicsaklott, amikor konkrét, iskolai relevanciájú kérdés került elő. Talán sikerül pontosan idézném kérdését, amelynek megválaszolásával a metakogníció-elmélet adós maradt: „Ha beszélünk metakognitív folyamatokról, akkor mi már meta-metaszinten társalgunk?”

Nagy József (2001) *XXI. század és nevelés* című könyvében – ritka kivételként – explicit módon megjelenik a metakognitív jelző, mégpedig a kognitív motívumok rendszerének taglalása során. A 132. oldalon a *kognitív attitűdök és meggyőződések* mellett a *metakognitív attitűdök és meggyőződések* kifejezésekkel találkozunk. Vessünk egy pillantást az *attitűd* és *meggyőződés* fogalmakra, amelyek ugyan ebben a könyvében a kognitív kompetencia témakörében kerülnek elő, de általánosságban a kognitív és affektív szféra metszetébe sorolja őket a szakirodalom. Pehkonen és Pietilä (2003) a matematikai nevelés területére kidolgozott fogalomrendszer tagjaként helyezi el egy skálán a *tudás*, a *meggyőződés (belief)*, az *attitűd* és az *érzelem* fogalmakat. Nagy József tehát az attitűdök és a meggyőződések esetében egyéni, és – ezt én teszem hozzá – tudatos viszonyként foglalkozik a metakognitív attitűdökkel és metakognitív meggyőződésekkel,

melyek „magára a kognícióra vonatkozó ismeretekhez, elméletekhez, paradigmákhoz való viszony” (Nagy, 2001. 132.) jelzői. Ebben a rendszerben a metakognitív attitűdök és meggyőződések lényegében a metakogníciónak azokat a kérdőívvel vizsgálható, statikus, gyakran potenciális elérhető, ám ténylegesen talán nem is használt összetevőit jelzik, amelyek mérésére kérdőívek sokasága született az elmúlt 20-30 évben.

Ha a metakogníció fogalmának vizualizálására törekszünk, a Nelson–Narens-modell a mai napig működőképes, és annak lényege, hogy két, hierarchikusan egymás fölé rendezhető szintet definiálhatunk az emberi gondolkodásban: a tárgyszintet, amely a nyomon követést lehetővé tevő információt nyújt a metaszinthez, míg a metasztint vezérli, kontrollálja a tárgyszintet. A modell logikus, átfogóan működőképes, azonban a konkrét helyzetekben az alkalmazhatósága kérdések özönét zúdítja elénk. Egy adott személy adott pillanatban megfigyelhető, mérhető teljesítményében mi számít vagy mik számítanak tárgyszintű avagy metasztintű összetevőnek? Lehetséges-e, hogy ami egy adott ember számára metasztintű folyamat, az egy másik számára tárgyszintű? Lehetséges-e, hogy egy adott személy számára egy folyamat egyszer tárgyszintű, egyszer pedig metasztintű? Ha pedig egy metasztintű folyamat tárgyszintre kerül, akkor annak metasztintjét korábban meta-metasztintűnek neveztük? Bár ezek a kérdések viszonylag könnyen feltehetőek, a mai napig nem született rájuk átfogó, az emberi megismerés valamennyi területére érvényes válasz. A matematikai gondolkodás egy részterületén, az aritmetikában gyűlt össze annyi empirikus adat és annyiféle elméleti modell, hogy ezen a részterületen már kísérletet tettem a válaszadásra.

Mielőtt elragadtatnánk magunkat a lehetőségtől, hogy az emberi gondolkodás fejlődésében végtelen távlatokat nyithat, ha a korábban metasztintű jelenségek tárgyszintre kerülnek, majd erre egy új metasztint épül, és így tovább, fontoljuk meg, hogy valójában az agyi kapacitás és a gyakorlatban felmerülő iskolai és iskolán kívüli kihívások a gondolkodás hány szintjének működését feltételezik! Nevezetes idézet Joyce (1986. 809.) *Ulysses*-éből, melynek filozofikus, logikai taglalását Tibor Schatteles (2014) vállalta föl:

Mik voltak, hogy a dolgot a legegyszerűbb viszonyossáig szállítsuk le, Bloom gondolatai Stephennek Bloomról való gondolatai felől, és Bloom gondolatai Stephen gondolatai felől, amelyeket tudniillik Bloom gondolt Stephen gondolatairól?

Ehhez hasonló, feladványszerű kérdés, hogy vajon hány lépést tudunk egyszerre, valódi mentális reprezentációkkal birtokolni a „tévémaci nézi a tévében, ahogyan abban a tévémaci a tévében nézi a tévémacit, amint...” A ’80-as évek egyik népszerű mozifilmjének címe is az emberi (meta)kogníció határait feszegeti: *Tudom, hogy tudod, hogy tudom*. Kimondani viszonylag egyszerű, hiszen nyelvtanilag rendben lévő a cím, ám mentálisan reprezentálni a benne szereplő fogalmakat a legtöbbünk számára olyan megerőltető, hogy az már humorosnak hangzik. Még egyszerűbb példával szemléltetve a lehetséges metasztintek számának korlátait: a kettős vagy hármas tagadással operáló retorika nagyjából kihasználja az emberi (meta)kognitív kapacitást, amikor például előszóban elhangzik: Nem igaz, hogy nem mondtam igazat, amikor cáfoltam X állítását. (Most akkor mit állítok?)

Ha Schatteles levezetésének mintájára leegyszerűsítjük az iménti összetett mondatokat, és marad kapacitásunk közben megfigyelni saját gondolkodási folyamatainkat, akkor feltehetőleg egymáshoz hasonló tapasztalatink lesznek: értelmünk apróbb lépésekben halad. Aki tapasztaltabb az ilyen állítások kezelésében, mint például a matematikusok az összetett állítások átfogalmazásában, nekik gyorsabban, kevesebb lépésben sikerülhet az alapos, valódi megértés. Közös lehet azonban mindannyiunkban, hogy megtapasztaljuk azt az élményt, amikor gondolkodásunk a saját gondolkodásunkat menedzseli: nyomon követ és irányít, sőt, esetenként tudatosan tervez, pl. elővehettünk egy papírlapot,

amelyen az összetett mondatok lépésekre bontását vizualizáljuk. Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy nem mondatelemzési feladványokról van szó, hanem a saját belső, mentális reprezentációinkkal végzett műveletekről. Mondatelemzési szempontból nem lenne sokkal nagyobb kihívás a „tudom, hogy tudod, hogy nem tudom, hogy tudod-e” kijelentés, azonban ennek mentális reprezentációja már emberfeletti kihívás. Hacsak valaki nem gyakorolja be az ilyen típusú állítások értelmezését egyre nehezedő példákon keresztül, a tesztekkel ellenőrizhető hibátlanságot és a tempót egyre inkább javítva...

Így érkeztünk el a készség- és képességmérő pedagógiai tesztek nagy dilemmájához: mi legyen a teljesítmény fő kritériuma, a tempó vagy a hibátlanság? Úgy tűnik, az elmúlt fél évszázadban a tempó kérdése és a tempó mérésének problémái egyfajta hullámvasutat járnak be. Az annak idején több szempontból úttörő vállalkozásnak számító Ágoston–Nagy–Orosz-monográfia (1974) a pedagógia méréses módszereiről szólva mintha trónra ültette volna az időmérést a készségek fejlettségének meghatározásában. A mérési skálák bemutatása során ugyanis a statisztikai szempontból leginkább információgazdagnak számító intervallumskálát az idő mérésénél látták biztosítva. A hibátlanság, avagy a teszten elért nyerspontszám esetén óvatosabbak, talán annak köszönhetően, hogy az intelligenciamérés első tesztjét létrehozó Binet is rangskáláról beszélt az intelligenciateszten elért pontszám kapcsán. Azóta a pedagógiai mérés és értékelés gyakorlata számára természetessé vált, hogy a tesztpontszámok (megfelelő jószágmutatókkal rendelkező teszt esetén) intervallum-skálán helyezhetők el. A pedagógia gyakorlatában használható teszteknel ugyanakkor az időmérésen alapuló készségfejlettség-mérést felváltotta a kellő időt biztosító tesztelési helyzetben elért tesztpontszámok elemzése. Csak az utóbbi két évtizedben, elsősorban a szemmozgás-vizsgálatok (Csíkos és Steklács, 2015), a személyes, időméréssel egybekötött adatfelvétel (Csíkos, 2016) és a számítógépes feladatmegoldási folyamatok logfájljainak elemzése (Molnár és Csapó, 2018) kapcsán került újra az érdeklődés homlokterébe az időadatok vizsgálata.

Mi a kapcsolat a készségmérés dilemmái és a metakogníció között? A kapcsolat kétrétű. Egyrészt a készségfejlődés folyamatában időről időre megjelennek fejlődési lépcsők, amelyek megélése a gondolkodási folyamatok minőségi fejlődését jelezheti. Másrészt ha a fejlődés vizsgálatától eltekintve a készség fejlettségének pillanatfelvételt vizsgáljuk, a metakognitív és nem metakognitív komponensek jelenlétére, szerepére és arányára tehetünk izgalmas megállapításokat.

### **A metakogníció szerepe a gondolkodás fejlődésében a számolási készség példáján**

Nagy József több kutatása vizsgálta a számolási készség fejlődését. Emblematikus ezek közül a későbbi akadémiai doktori címe alapjául szolgáló *5-6 éves gyermekeink iskolakészültsége* kötet (Nagy, 1980), melyben több ezer fős mintán, finom életkori felbontásban mutatta be a számolási készség különböző komponenseinek fejlődését. A számolási készségben és annak fejlődésében meghatározó elem, hogy a gyermek képes legyen a számneveket egymás után mondva „elszámolni”. Kis számkörben 1-ről indulva, nagyobb számkörökben pedig a pedagógiai tapasztalat szerint nehéznek látszó átlépéseket vizsgálva. Részletesen leírt, a világ bármely pontján, bármilyen nyelven megismételhető adatfelvételi protokoll alapján születtek azok a keresztmetszeti fejlődésvizsgálati eredmények, amelyek a számfogalom fejlődésében szemmel látható ugrásokat, hézagokat mutatnak. Ezeknek a fejlődési ugrásoknak a tanulmányozása azért is jelentős, mert megmutatja a keresztmetszeti fejlődésvizsgálatok erejét, hiszen sok-sok tanuló átlagos teljesítménye alapján következtethetünk az egyébként talán nem is létező „átlaggyermekre” jellemző fejlődésmentre. Ez a fejlődésvizsgálat emellett még akkor

sem volna helyettesíthető longitudinális vizsgálattal, ha rendelkezésre állna az éveken át történő azonos adatfelvételi kontextus, ugyanis egy adott, tetszőleges személynél a feladat sikeres teljesítését jelentő 0 vagy 1 pontokból nem következtethetnénk arra, hogy az egyes fejlődési lépcsők között mekkora hézag, mekkora fejlődési ugrás van. Longitudinális vizsgálat esetén az időmérés faktorának bevonása tenné lehetővé ezeknek a relatív fejlődési nehézségeknek a megállapítását.

A keresztmetszeti fejlődés ábráján több fejlődési ugrás azonosítható, amelyek hátterében valamilyen mentális reprezentációs fejlődés feltételezhető. Az értelmezéshez szükséges felidéznünk a Dehaene nevével fémjelzett hármaskód-elmélet alapvonásait (Piazza és Dehaene, 2004). Ez az elmélet, amely több nyelven is bőséges empirikus bizonyítékokkal rendelkezik, és az egész számról már kiterjesztették a törtszám-fogalomra is, azt állítja, hogy a számfogalom megfelelő működése három, egymástól jól megkülönböztethető agyi területhez köthető. Pszichológiai és pedagógiai szempontból a mentális és agyi folyamatok korrelátumait feltételezve ez azt jelenti, hogy háromféle pszichikus rendszer megfelelő együttműködése szükséges a jól működő számfogalomhoz. A három pszichikus komponensrendszer közül kettőt elég jól ismernek a laikusok is, és ennek a kettőnek a tudatos fejlesztése az óvodáskorban (sőt, előbb) megkezdődik. Az első rendszer, amelyhez óvodás kortól jelentős és tudatos pedagógiai fejlesztő munka társul, a számneveket tároló és előhívó rendszer. (Azt nem állítjuk, hogy időrendben is ennek a fejlődése indul meg elsőként, de erről a harmadik komponensrendszerrel szólnunk majd.) Már az óvodát megelőzően a gyermek aktív szókincséhez tartozhat néhány számnév, különösen az első három, akár versszerűen egybemondva: egy-két-há. Az óvodai fejlesztés nem lép ki a húszas számkörből – ugyanakkor nyilván nem tiltjuk és nem igazítjuk helyre a gyermeket, ha azt találja mondani, hogy száz vagy millió, hiszen a számneveket, ha nem is tudja azokat leírni vagy pláne elképzelni, sokszor hallja a környezetében, és gyakran harsány elismerésre talál, ha megismétli azokat.

A második komponensrendszer a számnevek képének a felismerése és a számnevek leírása. Elsősorban az arabnak nevezett számokról van szó, amelyek hozzákapcsolása a kimondott és hallott számnevekhez iskoláskori fejlesztési feladat. Ne feledkezzünk meg ugyanakkor a római számnevekről, melyekről szintén már óvodás kortól lehetnek tapasztalataik: elég, ha a nagyszülők kakukkos órájának számlapjára gondolunk. Később, iskoláskorban további számírási és számrendszerek kerülnek képbe, de ezek szerepe a biztosan működő számfogalomban már kevésbé jelentős. Amennyiben a számfogalom első két komponensrendszerének összekapcsolódásában zavarok támadnak, az már a számolásgyengeség (diszkalkulia) tünete lehet, noha 3. osztályos kor előtt nem várható erről szakértői bizottsági diagnózis.

A számfogalom harmadik, a laikusok számára kevésbé ismert, és a pedagógiai fejlesztő munkában részt vevők számára is kevésbé tudatosított összetevője a számok mentális reprezentációja, elsősorban valamilyen mentális vizuális reprezentációja. Nyilvánvaló, hogy a látássérültek számára különösen fontos, de az ép érzékszervekkel rendelkezők számára is jelentős az auditív reprezentációk hozzákapcsolása a számnevekhez és a számok leírt alakjához: gondoljunk a zenei kották ütemjelzésére. Ahogyan korábban utaltam rá, időrendben talán a számok belső, mentális, ezen belül elsősorban auditív reprezentációi indulnak fejlődésnek. Újszülöttekkel végzett kutatások igazolták, hogy képesek különbséget tenni különböző számosságok között: nyilván még jóval azelőtt, hogy a számok neveit vagy a számjegyek leírt képeit megismernék. Ezek a belső, mentális reprezentációk, amelyek révén a számfogalom stabilá válik, mindenkiben egyedileg alakulnak ki. Talán mi, felnőttek nem is tudunk már beszámolni arról, hogy amikor kimondjuk a *kettő* számnevet vagy leírva látjuk a 2 számjegyet, akkor ahhoz milyen mentális reprezentációt társítunk. Ezek a mentális reprezentációk ráadásul alakulnak, újraíródnak életünk során, és az iskoláztatás során elterjedten használt számegyenesnek

köszönhetően már 2. osztályos korban meghatározó belső reprezentációs forrássá válik a mentális számegetes.

A számfogalom fejlődésében mutatkozó lépcsők, fejlődési ugrások a hármaskód-elmélet szellemében a mentális reprezentációk változásával és a mentális reprezentációkra vonatkozó metakogníció fejlődésével magyarázhatók. Az egyjegyű számok körében a legkézenfekvőbb (a szó szoros értelmében: kézen fekvő) mentális modell az ujjak segítségével számolgtatás, az ujjak nyitogatása, a kinyitott ujjak képének és a kimondott számneveknek az összekapcsolásával.

Ahogy a magyar szólás mondja: „ötről hatra jutni” bizony nehéz dolog. Ez a fejlődési lépcső könnyen magyarázható az ujjakon számolás révén születő mentális reprezentációkkal, a második kéz bevonásával együtt járó tudatos odafigyelés szükségességével. A hat és a hét közötti fejlődési ugrás alighanem a számnevek hasonlóságán is múlik, melyet a gyermeknek belül, a mentális reprezentációk terén valahogy kezelnie kell. Érdekeség, hogy több más nyelvben is alakilag hasonló számnevek léteznek a hat és a hét jelölésére, így akár egy kisebb, célzott nemzetközi összehasonlító elemzést is megérne a kérdés. A tíz és a tizenegy közötti fejlődési lépcsőt aligha kell magyarázni. Amikor elfogynak az ujjak, a felnőttek tréfásan azt szokták mondani, a lábujjakon folytassuk a számolást, de ez valahogy mégsem vált kulturális hagyománnyá. Ugyanakkor a „kézen fekvő” tíz ujjas testszámolási sémában is jelentős kulturális különbségek vannak. Például nem ugyanazok az ujjak jelölik az egyes mennyiségeket: gondoljunk az angolszász filmekből jól ismert kettesre, amikor a mutató- és középső ujj (kézfejjel kifelé) jelzi a mennyiséget. De a japán testszámolásban az ujjak kinyitogatásával szemben éppen a becsukásuk jelzi az adott mennyiséget. Nevezetessé vált a pápua új-guineai okszapmin törzs testszámolási sémája, amelyet Saxe népszerűsített (YouTube-videón is megtekinthető a mozdulatsor),<sup>1</sup> és amely az adott kultúrkörben elegendően tágas számkörben, 27-ig működik, a középen, 13-nál a bal szemre, 14-nél az orrhegyre, 15-nél a jobb szemre mutatva.

A Nagy József által publikált fejlődési görbéken még egy markáns és meglepő fejlődési lépcső azonosítható az iskoláskor elején, ez pedig a tizenhat és a tizenhét közötti ugrás. Utalhatunk itt is a számok neveinek hasonlóságára, ám mivel a tizenhat és a tizenhét

*A hat és a hét közötti fejlődési ugrás alighanem a számnevek hasonlóságán is múlik, melyet a gyermeknek belül, a mentális reprezentációk terén valahogy kezelnie kell. Érdekeség, hogy több más nyelvben is alakilag hasonló számnevek léteznek a hat és a hét jelölésére, így akár egy kisebb, célzott nemzetközi összehasonlító elemzést is megérne a kérdés. A tíz és a tizenegy közötti fejlődési lépcsőt aligha kell magyarázni. Amikor elfogynak az ujjak, a felnőttek tréfásan azt szokták mondani, a lábujjakon folytassuk a számolást, de ez valahogy mégsem vált kulturális hagyománnyá. Ugyanakkor a „kézen fekvő” tíz ujjas testszámolási sémában is jelentős kulturális különbségek vannak. Például nem ugyanazok az ujjak jelölik az egyes mennyiségeket: gondoljunk az angolszász filmekből jól ismert kettesre, amikor a mutató- és középső ujj (kézfejjel kifelé) jelzi a mennyiséget. De a japán testszámolásban az ujjak kinyitogatásával szemben éppen a becsukásuk jelzi az adott mennyiséget.*

közötti fejlődési lépcső azoknál bukkan elő, akik a hat és hét közötti lépcsőt már leküzdötték, itt valami más, talán mélyebb ok lehet a háttérben. A nemzetközi összehasonlítás relevanciája itt is adódik: az olasz nyelvben a számnévképzésben például éppen a tizenhat és a tizenhét között történik egy váltás: *sedici*, azaz „hat-tíz” után *diciassette*, azaz „tizen hét” következik, de már a portugál nyelvben a hasonló nyelvalak-váltás a 15 és a 16 között történik: *quinze* után *dezassei* jön. A nemzetközi összehasonlító vizsgálatok gyakran említik még az angol és több más európai nyelv egyedi számneveit a tizenegyre és a tizenkettőre, amely minden bizonnyal egy ősi tizenkettes számrendszer maradványa. (Az angolban külön kifejezés létezik a 12-szer 12-re, a 144-re is: *gross*.) Emellett a francia nyelvet hozzák példaként egy ősi 20-as számrendszer emlékének őrzőjeként, ahol a 88 például szó szerint „négyhúsz-nyolc”. Ellenben a kínai és több keleti nyelv szabályosnak titulálható, legalábbis a tízes számrendszer szabályszerűen kifejeződik a számnevek képzésében. Tanulságos Zaslavsky (1984) könyve Afrika számneveiről, amelyből megtudjuk, hogy többféle számrendszer történelmi maradványai jelennek meg a számnevekben, például a szuahéliben a nyolc a „négy-négy” szavakból születik kis egyszerűsítéssel.

A számok írásában a tízes számrendszert nagyon pontosan tükröző arab számok lényegében egyeduralgokká váltak a matematikában, noha a keleti nyelvek kéírásában és a római számok alakjában más számírási rendszerek is velünk élnek. A római számok írásában feltűnő, ám a magyar gondolkodásmóddal egyáltalán nem ellentétes, amikor egy nagyobb szám jele elé tett, kisebb számot jelölő jel mintegy kivonásként módosítja a szám jelentését. IX azt jelenti, egyet vegyél el tízből, tehát kilenc lesz. XC azt jelenti, tízet vegyél el százból, tehát kilencven lesz. A IX akár úgy is olvasható, mint az a szám, amelyen kívül a tíz van, és így a kül-inc kifejezés teljesen érthetővé válik.<sup>2</sup> Az inc jelentése könnyen adódik a három incből, azaz a harmincből. Bájos számnévképzési jelenség, és metakognitív gondolkodási folyamatok egyértelmű indikátora az iskoláskor elején, amikor tízesével számolva a hetven, nyolcvan, kilencven után a „százvan” jön, hiszen olyan szépnek, rendezettnak tünnek már korábban a tíz többszörösei.

Mindezeket a nyelvészeti és kultúrtörténeti kitérőket azért tettük, mert bár a számok nevei és leírt alakjai viszonylag könnyen összekapcsolódnak az ép fejlődésű gyermek fejében, még ennek a két komponensrendszernek a fejlesztésében is lehetnek olyan ismereteink, amelyeket pedagógusként érdemes tudatosítanunk és esetleg tudatosan felhasználnunk a számfogalom kialakításában. Ne feledjük, egyre több gyermek ismerkedik meg idegen nyelvekkel már a családjában és az iskoláskort megelőzően! A hármaskód-elméletben az idegen nyelven történő számhasználatnak és számolásnak a helye ott van, hogy szinte minden emberben van egy kitüntetett nyelv, amelyen a számfogalom működőképes. Ez általában az a nyelv, amelyet a formális iskoláztatást megelőzően, a családi környezetben használ. Ehhez a bázisnyelvhez képest a számoknak idegen nyelven történő kimondása és az idegen nyelven hallott számoknak a megértése gyakran tudatosságot, de ha a tudatosság helyett már lényegileg automatizálódás van, akkor is több időt igényel, igénybe véve az agy belső fordítószolgáltatását.

Elérkeztünk a számfogalom harmadik pilléréhez, a mentális reprezentációk kérdéséhez. Megfelelően tárolt és előhívható mentális reprezentáció nélkül a számfogalom torz és fejletlen marad. Megtanulhatjuk egytől tízig (vagy még tovább, akár visszafelé is) a számok neveit akármilyen nyelven, ám ez sokkal inkább egy megtanult vershez vagy imához fog hasonlítani, és még nem a működő számfogalom bizonyítéka. Hogyan vizsgálhatók az elmében meglévő és működő reprezentációk? Honnan tudjuk, hogy valakinek pontos elképzelése van arról, mekkora szám a hatvan, másvalakinek pedig nincs erről megfelelő reprezentációja? A Tisztelt Olvasó akár önmagának is felteheti a kérdést, hogy mit jelent számára, ha valamilyen mennyiségnél azt hallja vagy éppen leírva látja, hogy 60. Egy európai kutatás szerint (Heine és mtsai, 2010), és ennek eredményei jó

eséllyel általánosíthatók a magyar tanulókra, az általános iskola 2. osztályának végére eléggé pontos, lineáris felépítésű mentális számegyenes alakul ki a gyermekek fejében. A mentális számegyenes az iskolai füzetben, a táblán vagy a képernyőn unos-untalan-szor látott, külső objektivációnak is nevezhető számegyenesről a pszichikumban elraktározott, a saját egyéni igényeknek megfelelően zoomolható, alakítható belső kép. Ezt megelőzően is létezik egy belső, mentális számegyenes a fejben, már óvodás kortól, mégpedig szintűgy balról jobbra haladva a nagyobb mennyiségeket reprezentálva, ám annak a beosztása még nem lineáris a száz-as számkörben, hanem logaritmikus. Vagyis a kisebb számkörből a nagyobb felé haladva a mentális számegyenes beosztása elnagyolttá válik, és ugyanakkora beosztás rajta a valóságban sokkal nagyobb mennyiségnek felel meg. Avagy megfordítva: minél nagyobb mennyiségekről gondolkodik egy óvodás vagy elsős, annál nagyobb, mennyiségek közötti különbségek tűnnek egyforma nagynak a fejében lévő mentális számegyenesen. Kis egyszerűsítéssel, a tízhez képest nagyjából olyan messzire képzeli el a húszat, mint a húsztól az ötvenet vagy akár a százat. A mentális számegyenes vizsgálatában a szemmozgás-vizsgálatok játszanak úttörő szerepet. A szemmozgás-vizsgálatok olyan jelenségek detektálására alkalmasak elsősorban, amelyekről nincs vagy korlátozott a szavakkal elmondható tudásunk. Ötletes kísérleti elrendezéssel, a képernyőn felbukkanó számegyenes adott pontjaira vonatkozó fixációk elemzésével következtethet a kutató arra, hogy a belső, mentális számegyenesen hol van az egyes mennyiségek helye.

A mentális számegyenes univerzális; tetszőleges számkörökben, sőt az egész számon túl a racionális és irracionális számok helyének elképzelésére is alkalmas eszköz. Azonban egyes törtszámok, sorszámok és a kisebb egész számok esetében joggal feltelezhető, hogy a mentális számegyenesnél egyszerűbb, képszerűbb és kifejezettebben egyedi mentális reprezentációk alakulnak ki. Egy ausztrál kutatás (Hunting és Sharpley, 1988) szerint bizonyos törtszámokat már az óvodás korosztály is értő módon használt, azaz kialakul a hármaskód-elméletben leírt összetevők közül a számnév és valamilyen mennyiségi reprezentáció kapcsolata. Ez még azt megelőzően történik, hogy a törtszám leírt alakja vagy a számegyenes ismert lenne előttük. Ha felnőttként egy egyszerű tört, különösen ha egy egység tört nevét halljuk, talán nekünk sincs szükségünk a szám leírt alakjának, vagy akár a számegyenes 0 és 1 közötti részének pontos felidézésére. Gyanítható, hogy sokaknál az egyharmad fogalmához egy kördiagram harmadrésze asszociálódik, csakúgy, mint az egynegyedhez, bár az utóbbihoz már a fél felezésével is sokféle belső kép segítségével el tudunk jutni.

Pedagógiai szempontból mindezekből két fontos tanulságot szeretnék leszűrni. Elsőként azt, hogy a számfogalom fejlődése során a gyermek egyéni, küzdelmes utat jár be, melyen a számnevek, a számok leírt képe és valamilyen mentális reprezentáció összekapcsolódik, és ezeknek a kapcsolatoknak a létrejöttéhez csaknem bizonyosan szükség van tudatos, metakognitív folyamatokra. Másodszor pedig a pedagógiai fejlesztő munkában rejlő lehetőségek közül a sokféle fejlődési út ismeretét tartom fontosnak, melyet megelőzhet, de inkább mindvégig kísérhet egyfajta kíváncsiság az eltérő fejlődési utak iránt (ld. Ginsburg, 1996). Azok a fejlesztőfeladat-gyűjtemények, amelyek a számolási készséget célozzák (Józsa, 2014), alkalmasak arra, hogy a készség automatizálódásának folyamatában a feladatmegoldásra vonatkozó beszélgetéssel, az eltérő gondolkodásmódok tudatosításával a metakognitív jelenségek mintegy mankóként segítsék a fejlődést, amely mankók azután eldobhatók. A végeredmény, amely a tesztek pontszámaiban majd megnyilvánul, jó esetben a Nagy József által befejező szintnek nevezett (korábbi munkáiban gyakran antropológiai optimumként emlegetett) fejlettségi szint, ahol a számolási készség automatizáltsága, a jól működő számfogalom figyelhető meg.

A számfogalom fejlődésének, és ezzel együtt a számolási készség automatizálódásának, készségszintű működésének kulcsa, hogy a jelentős egyéni különbségeket mutató



mentális reprezentációkat megismerjük, és segítsük azok hozzákapcsolódását a számnevek leírt és hallott alakjaihoz. Az egész számok körében a mentális száme gyenes vezető és uralkodó szerepe aligha megkerülhető, ám a törtfogalom alakulása során a száme gyenes 0 és 1 közötti, majd további szakaszai mellett egészen felnőttkorig változatos, egyéni képek segíthetik a fogalomfejlődést. Karika és Csíkos (2018) kiemelik, hogy a törtek 5. osztályban felgyorsuló tanítása során a pedagógusnak szüksége lehet többféle képi szemléltetési formára, mely mélyíti a törtfogalmat. Egyszerű példánkat legyen szabad itt újra elővenni. A szavak és a leírt törtszámok szintjén talán nem okoz gondot a legtöbb felnőttnek és 5. osztályosnak azt belátni, hogy  $\frac{3}{4}$  az ugyanaz, mint háromszor  $\frac{1}{4}$ . Mégis úgy véljük, érdemes képet is társítanunk a fogalomhoz, például három tábla csokoládé (vagy három pizza) segítségével lejátsszuk, mit jelent egy dolgot negyedelni, majd a negyedekből hármat venni, és mit jelent ugyanabból a dologból hármat venni, és azt negyedelni. Az a tudás, amelyet az 5. osztályos tankönyv már feltételez, ti. hogy a törtszámokat a tanulók képesek két egész szám hányadosaként is kezelni, valóban feltételezhető a matematikai szimbólumok szintjén, de egy erős, időtálló törtfogalomhoz a mentális reprezentációk szintjén is fontos segítenünk a fejlődést.

### Általánosítási lehetősége az olvasás és további területek irányába

Campione, Brown és Connell (1988) táblázatszerűen egymás mellé állították az olvasás, a matematika és az írás tanításának pedagógiai problémáit. A diagnózis közös eleme mindhárom területen, hogy az alsó tagozatos iskolai évek során gyorsan és pontosan működő készségrendszerek fejlődését tűzzük ki célul: a nevezetes angol kifejezés, a „három R” is erre utal: Reading, wRiting, aRithmetic, mindhárom fogalom esetén az adott terület automatikus, készség szinten működő elemekre utalva. Ahogyan azonban egyre többen felhívták rá a figyelmet, az iskolai feladathelyzetekben gyakran túla utomatizálódnak ezek a készségek, és emiatt rugalmatlanná, maladaptívvá válnak. A szerzők javaslata szerint a készségfejlesztést cél helyett eszközként kellene használni az értő olvasás, a matematika megértése és a kommunikatív írás fejlesztésében.

A metakogníció iskolai fejlesztésben betöltött szerepéről szóló kutatások leggyakrabban az alsó tagozatos korosztályt célozzák, mert ebben a korosztályban különösen szembe tünő, hogy egy már többé-kevésbé automatizálódott készségrendszerre alapozva miként lehet a teljesítményt növelni tudatos, metakognitív stratégiák tanításával. Ugyanakkor eddig kevésbé került az érdeklődés homlokterébe, hogy maguknak a többé-kevésbé automatizálódott alapkészségeknek a kialakulásában is megkerülhetetlen szerepe van metakognitív folyamatoknak (Zur és Gelman, 2004). Ezeket a metakognitív folyamatokat általában nem nevezzük stratégiáknak, hanem inkább egyéni, tanulói vagy tanítói ötletmorzsaként gondolunk rájuk. Amikor az írott f betűt tanuló gyermek az írásfüzetében a sor elején egy dróton ülő fecske sziluettjét látja, és esetleg átmenetileg fecske betűnek nevezik az f betűt, bizonyosan metakognitív folyamatok segítik az íráskészség fejlődését, ám a legtöbb felnőtt, akiben a készség automatizálódott, már aligha gondol f betű írása közben a dróton ülő fecskére. Ugyanígy az olvasástanulásban is a pedagógusok metakognitív tapasztalatait összegzi, hogy egyes betűket milyen sorrendben tanítanak, hogyan kezelik az egymáshoz hasonló morfémák okozta nehézségeket. Maguk a tanulók is ösztönösen, saját belső gondolataikat egyre pontosabban megismerve tudnak önmaguk számára szabályszerűségeket megfogalmazni, melyek átmeneti mankóként segítik az olvasás deklódoló készségrendszerének kialakulását. Az alapkészségek összetevői között Nagy József (1996) a *rutin* kifejezést használja azokra a nem tudatos, automatikus folyamatokra, amelyek a gyors és pontos készségműködéshez nélkülözhetetlenek. Bár a nemzetközi kutatásokban ezek különböző elnevezéssel szerepelnek, jól felismerhető a közös szerepük és

hasonló fejlődési törvényszerűségeik. A számolási készség komponensei között rutinként gondolhatunk az aritmetikai tényekre (*number facts*), vagy akár a SFON (*spontaneous focusing on numerosity*) jelenségre. Az olvasás területén Nagy József számos helyen definiálta a szórutinokat (Nagy, 2006, 2007), hozzátéve, hogy a képirást használó nyelvekben mennyiségileg és az olvasásfejlődés szempontjából hasonló kihívást jelentő képződmények vannak. Az írás területén azokra a betűelemekre, betűkre gondoljunk, amelyeket csukott szemmel is elfogadható olvashatósággal le tudunk írni, miközben nem kell egyáltalán arra gondolnunk, kezünk éppen milyen mozdulatokat végez.

Konkrét agyi területek érése teszi lehetővé az ép emberekben, hogy a kezdetben még tudatos odafigyelést, metakognitív tervezést, nyomon követést és ellenőrzést igénylő folyamatok sikeresen automatizálódjanak, és váljanak valóban készségszintűvé. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy akinél elmarad a megfelelő kisgyermekkorai fejlesztés, és például felnőttkorban vagy valamilyen betegség utáni terápia részeként (újra) tanul olvasni, írni vagy számolni, határozott sebességcsökkenést okoz, hogy metakognitív kompenzáló stratégiák jutnak főszerpehez. A végeredmény, a tesztekkel mérhető készségműködés jó esetben akár (újra) elérheti az antropológiai optimumot, azon az áron, hogy az ép, többségi gyermektársadalomban tapasztalható sima, automatikus készségműködés helyett erőteljes, tudatos, metakognitív működés szükséges. Lehetséges, sőt valószínű, hogy egy rehabilitációs terápián átesett felnőtt vagy egy súlyos pszichikus zavarral diagnosztizált tanuló a céltudatos fejlesztő

munka hatására a számolástervezten egyre jobb teljesítményeket ér el, ám szellemi erőforrásait a kompenzációhoz szükséges metakognitív folyamatok alaposan lefoglalják.

Az alapkészségekben, kiemelten az olvasás, a matematika és az írás területén a metakognitív folyamatok, a szokásosan stratégiának nevezett tudáselemek nem a fejlődés valamely késői, érett szakaszában felbukkanó és onnantól fejlesztendő és fejlesztendő termékek, hanem a készségfejlesztés kezdeti szakaszától jelen vannak. Éppen az jelzi a fejlődést, a mérhető teljesítmény növekedését, hogy a metakognitív és a nem metakognitív elemek hogyan működnek együtt.

Zárógondolatként azt a reményt fogalmazom meg, hogy tanulmányomban sikerült megvalósítani két olyan célkitűzést, amely Nagy József munkáiban mindig meghatározó volt: bátran kérdezni és a kérdésre elfogulatlan választ találni, eközben pedig folyamatosan az általános pedagógiai tanulságokat keresni.

*Konkrét agyi területek érése teszi lehetővé az ép emberekben, hogy a kezdetben még tudatos odafigyelést, metakognitív tervezést, nyomon követést és ellenőrzést igénylő folyamatok sikeresen automatizálódjanak, és váljanak valóban készségszintűvé. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy akinél elmarad a megfelelő kisgyermekkorai fejlesztés, és például felnőttkorban vagy valamilyen betegség utáni terápia részeként (újra)tanul olvasni, írni vagy számolni, határozott sebességcsökkenést okoz, hogy metakognitív kompenzáló stratégiák jutnak főszerpehez. A végeredmény, a tesztekkel mérhető készségműködés jó esetben akár (újra) elérheti az antropológiai optimumot, azon az áron, hogy az ép, többségi gyermektársadalomban tapasztalható sima, automatikus készségműködés helyett erőteljes, tudatos, metakognitív működés szükséges.*

## Köszönetnyilvánítás

A kutatást az MTA Közoktatás-fejlesztési Projektje támogatta (MTA-SZTE Metakogníció Kutatócsoport).

## Irodalom

- Afflerbach, P., Pearson, P. D. & Paris, S. G. (2008). Clarifying differences between reading skills and reading strategies. *The Reading Teacher*, 61, 364–73. DOI: 10.1598/rt.61.5.1
- Ágoston, G., Nagy, J. & Orosz, S. (1974). *Méréses módszerek a pedagógiában*. Tankönyvkiadó.
- Campione, J. C., Brown, A. L. & Connell, M. L. (1988). Metacognition: On the importance of understanding what you are doing. In Charles, R. I. & Silver, E. A. (szerk.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Volume 3. Lawrence Erlbaum Associates. 93–114.
- Csikos, C. & Dobi, J. (2001). Matematikai nevelés. In Báthory, Z. & Falus, I. (szerk.), *Tanulmányok a neveléstudomány köréből – 2001*. Osiris. 355–372.
- Csikos, C. (2007). *Metakogníció – a tudásra vonatkozó tudás pedagógiája*. Műszaki Könyvkiadó.
- Csikos, C. (2016). Strategies and performance in elementary students' three-digit mental addition. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 123–139. DOI: 10.1007/s10649-015-9658-3
- Csikos, C. (2022). Metacognitive and non-metacognitive components in arithmetic performance – Can there be more than one meta-level? Manuscript accepted for publication. *Journal of Intelligence*. DOI: 10.3390/jintelligence10030053
- Csikos, C. & Steklács, J. (2015). Phases of a ten-year old student's solution process of an insight problem as revealed by eye-tracking methodology. *Mathematics Teaching-Research Journal Online*, 8, 26–48.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist*, 34, 906–911. DOI: 10.1037/0003-066x.34.10.906
- Fleming, S. M., Dolan, R. J. & Frith, C. D. (2012). Metacognition: Computation, biology and function. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 367, 1280–1286. DOI: 10.1098/rstb.2012.0021
- Ginsburg, H. P. (1996). Toby's math. In Sternberg, R. J. & Ben-Zeev, T. (szerk.), *The nature of mathematical thinking*. Lawrence Erlbaum Associates. 175–202.
- Heine, A., Thaler, V., Tamm, S., Hawelka, S., Schneider, M., Torbeyns, J., De Smedt, B., Verschaffel, L., Stern, E. & Jacobs, A. M. (2010). What the eyes already 'know': using eye movement measurement to tap into children's implicit numerical magnitude representations. *Infant and Child Development: An International Journal of Research and Practice*, 19(2), 175–186. DOI: 10.1002/icd.640
- Hunting, R. P. & Sharpley, C. F. (1988). Fraction knowledge in preschool children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), 175–180. DOI: 10.2307/749411
- Joyce, J. (1986). *Ulysses*. Szentkuthy Miklós fordítása. Európa Könyvkiadó.
- Józsa, K. (2014). *A számolás fejlesztése 4-8 éves életkorban*. Mozaik Kiadó.
- Karika, T. & Csikos, C. (2018). A törtfogalom fejlődésének segítése az alsó és a felső tagozat határára. *Gyermeknevelés*, 6(1), 86–98. DOI: 10.31074/gyn201818698
- Leahey, T. H. & Harris, R. J. (1993). *Learning and Cognition*. 3rd ed. Prentice Hall.
- Molnár, G. & Csapó, B. (2018). The Efficacy and Development of Students' Problem-Solving Strategies during Compulsory Schooling: Logfile Analyses. *Frontiers in Psychology*, 9, 302. DOI: 10.3389/fpsyg.2018.00302
- Nagy, J. (1980). *5-6 éves gyermekeink iskolakészültsége*. Akadémiai Kiadó.
- Nagy, J. (1996). *Nevelési kézikönyv személyiségfejlesztő pedagógiai programok készítéséhez*. Mozaik Oktatási Stúdió.
- Nagy, J. (2000). *XXI. század és nevelés*. Osiris.
- Nagy, J. (2006). Olvasástanítás: A megoldás stratégiai kérdései. In Józsa, K. (szerk.), *Az olvasási képesség fejlődése és fejlesztése*. Dinasztia Tankönyvkiadó. 17–42.
- Nagy, J. (2007). *Kompetencia alapú kritériumorientált pedagógia*. Mozaik Kiadó.
- Nelson, T. O. (1996). Consciousness and metacognition. *American Psychologist*, 51, 102–16. DOI: 10.1037/0003-066x.51.2.102
- Nelson, T. O. & Narens, L. (1994). Why investigate metacognition. In Metcalfe, J. & Shimamura, A. P. (szerk.), *Metacognition: Knowing about Knowing*. MIT Press. 1–25. DOI: 10.7551/mitpress/4561.003.0003
- Pehkonen, E. & Pietilä, A. (2003). On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education. In *Proceedings of the CERME-3 (Bellaria) meeting*. 1–8.

- Piazza, M. & Dehaene, S. (2004). From number neurons to mental arithmetic: the cognitive neuroscience of number sense. In Gazzaniga, M. S. (szerk.), *The cognitive neurosciences III*. MIT Press. 965–975.
- Schatteles, T. (2014). *The Mirror of Socrates: Twelve Essays of a Reader on World Literature*. Archway Publishing. <http://www.archwaypublishing.com/en/bookstore/bookdetails/496086-The-Mirror-of-Socrates>
- Schoenfeld, A. H. (1993). Mi is az a metakogníció? In Dobi, J. (szerk.), *A matematikatanítás a gondolkodásfejlesztés szolgálatában. Tantárgypedagógiai szöveggyűjtemény*. Keraban Kiadó. 108–127.
- Sternberg, R. J. (1985). *Beyond IQ: A Triarchic Theory of Human Intelligence*. Cambridge University Press.
- Zaslavsky, C. (1984). *Afrika számol*. Gondolat Kiadó.
- Zur, O. & Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly*, 19, 121–37. DOI: 10.1016/j.ecresq.2004.01.003

## Jegyzetek

- <sup>1</sup> <https://www.youtube.com/watch?v=0aZZcErLYJQ>
- <sup>2</sup> <https://www.arcanum.com/hu/online-kiadvanyok/Lexikonok-magyar-etimologiai-szotar-F14D3/k-F287B/kilenc-F2AD1/>

## Absztrakt

A tanulmány azt vizsgálja, milyen lehetőségei vannak a metakogníció-elméletnek a 21. századi pedagógiai gyakorlat egyik fontos területén, a számolási készség fejlesztésében. A metakogníció elméleti modelljei rövid fejlődéstörténetének áttekintését és a metakogníció-kutatás megoldatlan kérdéseinek említését követően azt vizsgáljuk, a Nagy József kutatásaiban is kitüntetett helyen szereplő számolási készség értelmezésében, értékelésében és fejlesztésében milyen szerep juthat a metakogníció-elmélet segítségével megfogalmazható elméleti és gyakorlati megállapításoknak. A számfogalom hármaskód-elmélete és a számolási készség fejlődésének vizsgálata egyaránt jól illeszthető ahhoz az elképzeléshez, hogy a számolás metakognitív jelenségei nem a készség fejlődésének késői, érett szakaszában jutnak főszerephez, hanem a készség fejlődésének kezdeti időszakától a metakognitív és nem metakognitív komponensek összjátéka adja a megfelelő aritmetikai teljesítményt. Bár a számolási készség vizsgálata nyújtott először elegendő empirikus bizonyítékot arra vonatkozóan, hogy a kiterjesztett Nelson–Narens-modell segítségével leírhatóvá válják a metakognitív komponensek szerepe, más készségterületek, elsősorban az olvasás területén is a számolási készséggel analóg módon értelmezhető a metakognitív és nem metakognitív elemek egyensúlya és fejlődésben betöltött szerepe.

**Kulcsszavak:** számfogalom, számolási készség, olvasás, metakogníció, koragyermekkorai nevelés