

Ökördi Réka¹ – Molnár Gyöngyvér²¹ SZTE Neveléstudományi Doktori Iskola² SZTE Neveléstudományi Intézet

A matematikai gondolkodás fejlettségi szintje beilleszkedési, magatartási és tanulási nehézséggel küzdő 5–8. évfolyamos diákok körében: szakértői vélemények kvalitatív elemzése

A magyar közoktatásban fejlesztő pedagógusi munkakört láthat el az a pedagógus, aki ilyen irányú képzettséggel – jelenlegi gyakorlat szerint másoddiplomával – rendelkezik. Prevenációs és korrekciós eljárások ismeretében kötelező jelleggel fejlesztő foglalkozásokat tart a szakértői véleményük alapján beilleszkedési, tanulási vagy magatartási nehézségekkel küzdő (BTMN) tanulók számára, illetve segíthet szakértői véleménnyel nem rendelkező, ám tanulási nehézségekkel küzdő diákokat is. Sajátos nevelési igényű (SNI) gyermekek fejlesztése nem kompetenciaköre, az gyógypedagógusi feladat.

Az 5–8. évfolyamos BTMN státuszú diákok fejlesztésének egyik megoldatlan, ám a sikeres fejlesztéshez feltétlenül szükséges területe a matematikai gondolkodás fejlesztése. Tanulmányunkban ezért azt a kérdést vizsgáltuk, hogy a magyarországi fejlesztőpedagógiai foglalkozásokon a matematikai gondolkodás fejlesztése explicit vagy implicit módon kitűzött célként megjelenik-e. A foglalkozások felépítését és célkitűzéseit a szakszolgálatok által végzett vizsgálatokat rögzítő dokumentumban, a vizsgálaton részt vevő tanulóról készült szakértői véleményben megfogalmazott vizsgálati eredmények és fejlesztési javaslatok határozzák meg. Négy szakszolgálatról származó szakértői vélemények elemzésével kerestük a választ erre a kérdésre.

A matematikai gondolkodás szerepe a matematikatanulásban és helye a matematikaoktatásban

Annak ellenére, hogy a jelenleg hatályos Nemzeti Alaptanterv csak szűkszavúan foglalkozik a matematikai gondolkodással, szakmai anyagokban fellelhető az a megközelítés, amely a gondolkodás fejlesztését az iskolai matematikaoktatás kiemelt célkitűzéseként kezeli. A NAT 2018-ban ismertté vált új tervezete (NAT, 2018) és az Educatio Kht.

2004 és 2008 között zajlott kompetenciaalapú oktatási programja (Fábián és mtsai, 2008) – amely prioritásként kezelte az esélyegyenlőséget és a sajátos nevelési igényű tanulók integrációjának támogatását (Falus és Vajnai, 2012) – komoly szerepet szánt a matematikai gondolkodásnak. A Nemzeti Alaptanterv 2018-as tervezete szerint „kiemelten fontos feladat a fogalmi gondolkodás, az elvonatkoztatás és a logikus következtetés képességének fejlesztése, valamint az erre épülő tudás és kompetencia megszerzésének támogatása” (NAT, 2018. 63.). Továbbá hangsúlyossá válik, hogy „a matematika tanulása során fejlődik az önálló, rendszerezett gondolkodás, az absztrakt következtetések használata, a problémamegoldás elsősorban induktív és deduktív típusainak adekvát használata” (NAT, 2018. 63.). A tervezet külön kiemeli a fejlesztés fontosságát az induktív gondolkodás területén, ami az új tudás létrehozásának egy fő eszköze (Molnár, 2006, 2008; Csapó és Molnár, 2012), továbbá a deduktív gondolkodást, hiszen enélkül az iskolai tananyagban szereplő következtetési láncok megértése, használata nem lehetséges (Vidákovich, 2002).

Nunes és Bryant (2015) a matematikát mint a felfedezésnek, a világról való gondolkodásnak és a világ megismerésének terepét írja le. Különbséget tesz a számokról és a mennyiségekről való gondolkodás között. Megkülönbözteti a matematikai gondolkodást és a számokról való tudást oly módon, hogy a számlálási és számolási képességek részét képezik a matematikai gondolkodásnak. A kutatási eredmények szerint az aritmetikai műveletek elvégzését meg kell, hogy előzze a mennyiségek közötti összefüggések megértése.

De Corte (1995) rámutat, hogy a jó színvonalú matematikai teljesítménynek nem elégséges feltétele a különböző számolási stratégiák, matematikai eljárások elsajátítása. Tanulmányában a matematikai tudás négy alkotóelemét határozza meg: a tantárgyspecifikus tudást, a heurisztikus módszereket, a metakognitív tudást és készségeket, továbbá az affektív komponenseket. Ám e négy komponens mellett fontos szerepet tulajdonít annak a képességnek, amelyet a tehetetlen tudás legyőzésének nevez (De Corte, 1997), azaz annak a hozzáállásnak, amely lehetővé teszi a tanuló számára, hogy felismerje azokat a helyzeteket, amikor egy már elsajátított matematikai képességet alkalmazhat. E hozzáállás része a motiváltság, azaz a hajlandóság és a kitartás a problémamegoldási folyamat során.

Yulibeth (2011) a metakogníció fontosságát emeli ki, amikor arra hívja fel a figyelmet, hogy a gondolkodási képességek fejlettsége szükséges ahhoz, hogy a tanuló a sikeresebb problémamegoldás érdekében tudatában legyen annak, hogy mit és hogyan cselekszik. Csikos és Kelemen (2009) rámutat arra, hogy a valóság modellezésére épülő matematikai feladatok megoldásában a gyengén, az átlagosan és a jól teljesítő diákok körében is az a flamand fejlesztő program hozott mérhető fejlődést, amelynek tartalmi szempontból leglényegesebb eleme egy öt lépcsőből álló metakognitív stratégia elsajátítása és a problémamegoldás során megvalósuló alkalmazása volt. A szöveges feladatok megoldásának sikerességét eszerint jobban biztosítja a metakognícióra építő tanulás, mint a begyakorlottságot középpontba állító oktatás.

Morsányi és Szűcs (2014) összegzi azokat a kutatási tapasztalatokat, melyek szerint a verbális és vizuális munkamemória, továbbá a gátló és a figyelmi funkciók összefüggésbe hozhatók a matematikai teljesítménnyel. Ugyanezek a funkciók a logikai gondolkodás során is szerepet játszanak. Morsányi és Szűcs megkülönbözteti a matematikai és a logikai gondolkodást, ugyanakkor rámutat arra, hogy az eddigieken túl mindkét esetben szükség van az absztrakt és szimbolikus tartalmak feldolgozásának képességére. A szorongás negatívan befolyásolja a munkamemóriát, csökkentve annak kapacitását, és lassítva ezáltal a feladatmegoldási folyamatot is. Krisztián (2016) összefoglalja azokat a kutatási eredményeket, amelyek kimutatják, hogy a jobb munkamemória az utasítások pontosabb követéséhez, hatékonyabb érzelemszabályozáshoz és a gondolkodást

igénylő feladatokban jobb teljesítményhez vezet. A jobb munkamemóriával rendelkező tanulók jobban teljesítenek matematikából és idegen nyelvekből is. Ám megjegyzi, hogy az egyébként megfelelő munkamemória kapacitását specifikusan matematikával összefüggő helyzetekben jelentősen ronthatja a matematikai szorongás.

Verschaffel és munkatársai (2009) felvetik azt a dilemmát, hogy amennyiben a matematikaoktatás célja mindössze a rutinjáráások rögzítése, akkor elegendő egyes mentális stratégiákat megtanítani, figyelmen kívül hagyva akár magát a problémafelvetést, akár a kontextust is. Ha viszont a cél a stratégiai rugalmasság, a matematikai megértés elősegítése és a matematika iránti pozitív attitűd kialakítása, akkor a matematikaoktatás kérdése már etikai problémákat vet fel, amennyiben a kiemelkedően tehetséges gyerekeken kívül a többi – átlagos és gyengén teljesítő – diáknak mégis szellemileg kevés kihívást igénylő, rutinjellegű matematika-tanítást nyújtunk. Dienes (2015) kritikával illeti a matematikaoktatást, amennyiben az a matematikát ismétlődő cselekedetek unalmas gyakorlásaként ismerteti meg a tanulókkal ahelyett, hogy az elme és a gondolkodás fejlesztésének olyan eszközeként tekintene rá, amely játékos és szórakoztató is egyben. Radványi (2011) hasonló problémára mutat rá a kognitív képességek terén jelentős elmaradást mutató gyermekek oktatásában az olvasás-írás területén. A jogszabályban megjelenő olvasás-írás előkészítése mint fejlesztendő kompetencia annak veszélyét hordozza, hogy a fejlesztés csak egyes – esetlegesen kiragadott – részterületekre irányul, és éppen azoknak a kognitív területeknek a fejlesztése marad el, „amelyek megfelelő szintje nélkül a tevékenység [értsd: írás-olvasás] mechanikus, alulmotivált és személyiségromboló lesz” (Radványi, 2011. 14.).

Dienes (2015) különbséget tesz tiszta matematika és alkalmazott matematika között. Tiszta matematikának nevezi a számokkal kapcsolatos összefüggések megértését és szimbolizálását, az alkalmazott matematika pedig ezek alkalmazása valós helyzetekre. A Dienes által megfogalmazott, általa az átlagos matematikaórán tapasztaltak megnevezéseként használt inger-válasz tanulási helyzet annak kritikájaként is olvasható, hogy a matematikaórán leginkább a tiszta matematika van jelen, ám az is megértés nélkül. Mivel a megértés azt jelenti, hogy a már megismert összefüggéseket következő még nagyobb összefüggésekbe építjük be, és így alkotunk egyre bonyolultabb struktúrákat, ezért aki az elején lemarad, annak később már nincsen esélye a megértésre.

A matematikai problémamegoldás során a kontextus figyelembevételével kell megtalálni a feladatban szereplő mennyiségek közötti viszonyokat, és az így előállított problémához a megfelelő megoldási stratégiát (Nunes, 2007). Ez a gyakorlat sokszor hiányzik

A matematikai probléma- megoldás során a kontextus figyelembevételével kell megtalálni a feladatban szereplő mennyiségek közötti viszonyokat, és az így előállított problémához a megfelelő megoldási stratégiát (Nunes, 2007). Ez a gyakorlat sokszor hiányzik az iskolai matematikaoktatásból, és nem jelenik meg a tankönyvekben sem. Holott a feladatmegoldás során elvégzett aritmetikai műveletek végrehajtása nem a szöveges feladatok elsődleges célja, hanem a felállított modellből fakadóan kell elvégezni őket. A diákokban az a képzet alakul ki, hogy a matematikatanulás célja egyes algoritmusok akár értelmezés nélküli használata annak érdekében, hogy egy adott feladatra helyes választ adjanak (Campioni és mtsai, 1988).

az iskolai matematikaoktatásból, és nem jelenik meg a tankönyvekben sem. Holott a feladatmegoldás során elvégzett aritmetikai műveletek végrehajtása nem a szöveges feladatok elsődleges célja, hanem a felállított modellből fakadóan kell elvégezni őket. A diákokban az a képzet alakul ki, hogy a matematikatanulás célja egyes algoritmusok akár értelmezés nélküli használata annak érdekében, hogy egy adott feladatra helyes választ adjanak (Campione és mtsai, 1988). Freudenthal (1988) megállapítja, hogy a matematikatanításban csak a geometria témakörben van lehetősége a diákoknak a tanár irányításával felfedezni a szerkesztés lépéseit, egyéb témakörökben a felfedezés tanítása nem valósul meg. Ugyanakkor éppen annak felfedezését szükséges tanítani, hogy miként jöhetünk rá egy probléma megoldására vagy egy tétel bizonyítására. A felfedezést ebben az esetben a gondolkodás szinonimájának tarthatjuk. Dienes (2015) különbséget tesz alkotó és elemző gondolkodás között, és megállapítja, hogy az alkotó gondolkodás megjelenése megelőzi az elemző gondolkodását. Ez a gondolat Dienes matematikatanulási alapelveinek egyik tétele (Dienes, 2015). Éppen ezért a gyerekek számára 12 éves korig konstruktív gondolkodást igénylő feladatokat és játékokat kell biztosítani. Ennek alapján megfogalmazható, hogy a fejlesztő foglalkozások elsődleges feladata a konstruktív gondolkodást igénylő és azt fejlesztő tevékenységek végzése legyen, és csak a megfelelő érettséget követően vezethetők be az elemző gondolkodást igénylő feladatok.

Freudenthal (1963) azt a jelenséget írja le, hogy a tanítók a konkrét mennyiségek tanítására – amelyet ő az aritmetika alapszintjének nevez – még sok időt szánnak, ám nem sokkal később, a szorzás és osztás tanításakor már csökken a ráfordított idő, míg végül a törtek tanítása során már nem jut elegendő idő a fogalmak kialakulására, a diákoknak olyan algoritmusokat kell megtanulniuk, melyeket még nem képesek megérteni. A későbbiekben ugyanez a sietség ismétlődik meg az algebra és a geometria tanításakor is. A törtek tanításával kapcsolatban Nunes és Bryant (2009) arra mutat rá, hogy bár sok tanár úgy vélekedik, a témakör tanítását el kellene hagyni az alsó tagozaton (*primary school*), a gyerekeknek ebben az életkorban már van informális tudásuk a törtekről, így nem az a kérdés vetődik fel, hogy el kell-e hagyni a törtek tanítását, hanem az, hogy mit tudunk a gyerekek törtekről szerzett tudásáról, és miként tudunk építeni rá a törtek tanítása során. A jelenlegi iskolai gyakorlatban a gyerekek képesek a törtekkal kapcsolatban procedurális tudásra szert tenni és a tanult eljárásokat alkalmazni anélkül, hogy a konceptuális tudás birtokában lennének, azaz értenék a törtekkal való műveletvégzések miértjét.

Ashcraft és Kirk (2001, idézi Krajcsi, 2010) a fejlődési diszkalkulia egyik lehetséges okaként a matematikai szorongást nevezik meg, amely nemcsak a tanórán, hanem bármely matematikával kapcsolatba hozható alkalommal megjelenik. Haase és munkatársai (2019) számolnak be arról, hogy a matematikai szorongás sikeres terápiája teljesítménynövekedéssel jár még a fejlődési diszkalkuliás diákoknál is. Ugyanakkor kutatásukban arra is rámutatnak, hogy az iskola kezdeti szakaszában oktató tanító-nők többsége maga is szorong a matematikától, és ezt a szorongást önkéntelenül is továbbadják a diákoknak. A tanítók szorongásának jelenségét írja le Yulibeth (2011) is. Ő azonban a latin-amerikai tanítók szorongását kutatva azt is megállapítja, hogy e szorongás okán a matematika számukra mindössze számokkal végzett műveletek sora, és éppen azt nem sajátították el, és így nem is tudják közvetíteni, hogy az iskolai matematika arra kínálhat lehetőséget, hogy szisztematikus módon fejlessze az érvelést, és ezáltal a gondolkodási képességeket.

Morsányi és Szűcs (2014) 10 éves diákokat vizsgáló kutatásukba fejlődési diszkalkuliásokat és matematikából kimagasló teljesítményt nyújtó tanulókat is bevontak. Fejlődési diszkalkuliásnak az olyan diákokat tekintették, akiknek intelligenciája, munkamemóriája és olvasási készségei az átlagos övezetbe estek, ugyanakkor a matematikai teljesítményük gyengébb volt az átlagénál. Habár egyes esetekben a szakirodalom a fejlődési diszkalkuliát a számfogalom specifikus és jól körülhatárolható zavaraként írja le,

Morsányi és Szűcs eredményei arra mutatnak rá, hogy ezek a tanulók kevésbé sikeresek olyan logikai érvelést igénylő feladatokban, amelyek képzeletbeli, vagy az empirikus tapasztalatokkal össze nem egyeztethető tartalommal rendelkeznek. Ezen felül gondolkodásukat erősebben meghatározzák és befolyásolják matematikai meggyőződéseik. Ennek magyarázataként a kutatók két lehetőséget vetnek fel. Ezek a diákok vagy a valós életből származó meggyőződéseiket nem tudják kizárni az érvelés folyamatából, vagy a vizuális képzelőerejük fejletlensége okán kevésbé alkalmasak nem létező problémák megjelenítésére és így értelmezésére is. Terápiás beavatkozásként az egyes problémákhoz rendelhető lehetséges megoldások számbavételét, illetve megalkotását és a képzelet fejlesztését vetik fel a matematikai nehézségekkel küzdő diákok esetében. Ezek a javaslatok közelebb állnak a gondolkodási folyamatok fejlesztését célzó tevékenységekhez, mint az egyes matematikai eljárások gyakorlásához.

Ostad (2008) a matematikai nehézségekkel küzdő diákok alaplételemek végzéséhez és szöveges feladatok megoldásához használt stratégiáiban megmutatkozó, és már az első tanévben megjelenő, majd a későbbiekben sem változó merevségére mutat rá mint ennek a heterogén tanulócsoporthoz közös jellemzőjére. Bár a nehézségek hátterében különböző okok állhatnak – pl. intelligencia, nyelvi nehézségek stb. –, a kis számú éretlen stratégia kizárólagos használata és a minimális változás e stratégiák használatának módjában mindvégig egyaránt jellemzi ezeket a tanulókat. Ostad – más kutatókra is hivatkozva – a matematikatanulási nehézségek lehetséges magyarázataként a hagyományos matematikaoktatást jelöli meg. Kutatásának eredményeként megállapítja, hogy a matematikai nehézséggel küzdő diákok oktatásában előre gyártott munkafüzetek kitöltése és a segédeszközök pusztán számlálást, illetve számolást segítő használata helyett a hangsúlyt a matematikai problémák megközelítésének megfelelő módjaira, a metakognitív stratégiák tanítására és alkalmazására kell helyezni. Mesterházi (1995) Vigotszkijra és követőire hivatkozva számol be arról a jelenségről, hogy a gyengén teljesítő diákok, akiknek nehézségei nem vezethetők vissza szervi okokra, feladathelyzetben az emlékezetükből előhívható eljárásokhoz folyamodnak, azok megváltoztatása nélkül, így nem vesznek részt aktív tanulási folyamatban, melynek következményeként a pszichikus funkcióik sem érlelődnek megfelelően. Ez a folyamat összefüggésbe hozható gondolkodásuk nem megfelelő fejlettségével és fejlődésével.

Nunes és Bryant (2015) rámutat arra, hogy számos, a gyerekek matematikai képességeit vizsgáló teszt kizárólag vagy szinte kizárólag a számfogalomra és az aritmetikai műveletek elvégzésének képességére koncentrál. A magyarországi szakszolgálatokban használatos Dékány–Juhász-féle diszkalkulia-pedagógiai vizsgálat felvételekor az árnyaltabb értékeléshez adatokat kell gyűjteni a vizsgálati személy szociokulturális hátteréről, viselkedéséről, különböző viszonyulásairól (Polgárdi és mtsai, 2018). A szerző ugyanakkor elismeri a jogosságát annak a kritikának, amely szerint a tesztel nehéz objektív szempontok alapján elkülöníteni a diszkalkuliasokat és az egyéb okokból alulteljesítőket. A teszt átdolgozott változata (Polgárdi és mtsai, 2018), a Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálata kiemelt jelentőségűnek tartja a vizsgálati személy gondolkodásának, a metakognitív folyamatoknak a megfigyelését, mely által az objektív értékelésen túl a dinamikus értékelés és az ehhez szükséges aktív és elemző vizsgálatvezetői részvétel is elengedhetetlen a vizsgálat során. Ez a fejlesztés oldaláról közelítő hozzáállás képes biztosítani a hatékony és személyre szabott terápiás beavatkozás megtervezését is.

Többek között De Corte (1995, 1997) gondolataira támaszkodva világít rá a sulinova oktatási programcsomag keretében készült matematikai szakmai koncepció (Fábián és mtsai, 2008) arra, hogy bár a matematikai kompetencia jócskán túlmutat a tantárgyi ismereteken, a matematikatanuláshoz és az ehhez nélkülözhetetlen matematikai gondolkodáshoz kapcsolódó motívumok és attitűdök ismerete és ezek fejlesztési

lehetőségei nem jelennek meg kellő hangsúllyal a tantárgypedagógiai szakmai anyagokban. A lemaradók, a gyengén teljesítők terápiájaként az egyes részkészségek még intenzívebb, rutinszerű alkalmazása valósul meg, a foglalkozásokról a gondolkodási módszerek megismertetése és gyakorlása hiányzik, amelynek következményeként az olló a lemaradók és az elvárások szerint teljesítő diákok között még nagyobbra nyílik (Campione és mtsai, 1988). A matematikatanulás terén nehézséggel küzdő diákok oktatásában a helyes stratégiák alkalmazására kell helyezni a hangsúlyt a minél több tartalommal szemben (Ostad, 2008). Ezeket a gyerekeket az alapkészségek monoton gyakorlása helyett abban kell támogatni, hogy fejlett problémamegoldó készség birtokába jussanak. Magyarországon mindezidáig a fejlesztőpedagógusi gyakorlatot és az annak alapjául szolgáló pedagógiai szakszolgálatok által kiadott szakvéleményeket nem vizsgálták ebből a szempontból.

A kutatás célja, kérdése

A tanulmányban bemutatott elemzések fő célja annak feltérképezése, hogy mi áll a BTMN státuszú diákok diagnosztizálásának és a fejlesztésükkel kapcsolatos javaslatok fókuszában. A rutineljárások, a számfogalom és az alpműveletek algoritmusai, vagy a matematikai gondolkodás kap nagyobb hangsúlyt? A percepció, az emlékezet és a munkamemória vizsgálatát a matematikai gondolkodással és a matematikai szorongással való kapcsolatuk szempontjából elemeztük.

Módszerek

A kutatás keretein belül 3 általános iskola és egy nyolcosztályos gimnázium 5–8. évfolyamos tanulóinak a 2019/2020-as tanév elején érvényes szakértői véleményét elemeztük (N = 171). Kutatásunk során az adott intézmény vezetője, illetve a dokumentumokat kezelő szakember engedélyezte a szakértői vélemények megtekintését és az azokban szereplő vizsgálati megállapítások gyűjtését a személyek beazonosítására alkalmas adatok rögzítése nélkül.

Mivel az általános iskolák BTMN státuszú diákjainak jelentős többségét, illetve a gimnázium összes 5–8. évfolyamos tanulóját az adott iskola körzetében található pedagógiai szakszolgálat vizsgálta, ezért kizártuk a vizsgálatból azt a 8 szakvéleményt, melyeket más körzethez tartozó pedagógiai szakszolgálatok állítottak ki. Ezáltal vált lehetővé az egyes iskolák körzetében található szakszolgálatok e tanulmány szempontjából fontos tevékenységének elemzése és összehasonlítása. Kizártuk továbbá azt a 49 szakvéleményt, amelyben SNI státusz megállapítását rögzítik. Az SNI státuszú gyermekek ellátása gyógypedagógiai feladat, így e szakvélemények vizsgálata nem járul hozzá e kutatás eredményeihez. Ennek megfelelően 114 szakvélemény elemzése alapján fogalmaztuk meg az elemzések eredményeire építő következtetéseket.

A tanulmányban elsőnek nevezett általános iskola nagyvárosban található. Beiskolázási körzetében a lakásviszonyokra az alacsony szobaszám, alacsony lakóterület és alacsony komfortfokozat jellemző. A körzetben kiemelkedően magas az élettársi viszonyban vagy egyszülős családokban nevelkedő gyermekek száma. Kiemelkedő a háromnál több gyermeket nevelő családok részaránya a gyermekes családok körében. A beiskolázási körzet felnőtt lakosságának 7%-a nem fejezte be az általános iskolát, míg 20,5%-a 8 általános iskolai végzettséggel rendelkezik. A munkanélküliség aránya a lakosság körében eléri a 8%-ot, és a nyilvántartott álláskereső aránya is közelít a 4%-hoz. Az átlagosnál kedvezőtlenebb szociodemográfiai helyzet – alacsony végzettségű, alacsony jövedelmű népesség – és több tekintetben egészségtelen épületállomány jellemzi a körzetet.

A második általános iskola szintén nagyvárosi elhelyezkedésű. A körzet lakóinak körében magas a közép- és felsőfokú képzettséggel rendelkező népesség aránya. A nyilvántartott álláskereső aránya nem éri el a 2 százalékot. Az iskola vonzáskörzete homogén magas státusú övezet, melyet a zöldterületek nagyobb aránya, a csendes, rendezett lakóövezet határoz meg.

A harmadik általános iskola középvárosi oktatási intézmény. Beiskolázási körzetében igen nagy számú értelmiségi család él, magas presztízsű, társadalmilag homogén lakóövezetek jellemzik a vonzáskörzetet. A város nem csupán agglomerációs, hanem szuburbán település. A nagyvárosba ingázó lakosság 90%-a közép- vagy felsőfokú végzettséggel rendelkezik.

A nyolcosztályos gimnázium nagyvárosi beiskolázási körzetének középiskolás korú lakossága szakgimnáziumba vagy gimnáziumba jár, szakközépiskolai tanulók a 2018. évi statisztikai adatok szerint nem élnek a körzetben. A vizsgált gimnázium diákjai felsőfokú végzettségüket nagyobb arányban tömörítő lakóövezetekből kerülnek ki. Az iskola hagyományosan magas státusú, műemléki és polgári lakásokkal rendelkező körzetben található. Az iskolába felvételi vizsgával lehet bekerülni az 5. évfolyamra. Az iskolába felvételiző diákok írásbeli felvételin elért pontszáma az országos átlag felett van magyarból és matematikából is. Mivel az iskolába két és félszeres túljelentkezés van, így e diákok közül is csak a legjobbakat veszik fel.

Az általunk vizsgált, iskolákban őrzött dokumentumokat az iskola körzetében működő Pedagógiai Szakszolgálat állította ki az adott diák vizsgálatát követően. E vizsgálat lehet első vizsgálat, vagy felülvizsgálat. A komplex gyógypedagógiai-pszichológiai vizsgálat állapotfeltárára irányuló részterületei az anamnézis felvétele, a pszichológiai vizsgálat során elvégzett teljes képességvizsgálat, és iskolás gyermekek esetében a pedagógiai vizsgálat keretében az olvasási, írási, helyesírási és matematikai képességek felmérése (Kuncz és mtsai, 2008). Komplex vizsgálatra akkor kerül sor, amikor a gyermeket a szakszolgálat először vizsgálja. Ha egy tanuló beilleszkedési, tanulási, magatartási nehézséggel küzd, illetve sajátos nevelési igényű, akkor meghatározott időközönként felülvizsgálaton kell részt vennie. A felülvizsgálat eredményei alapján dönt a szakszolgálat a szakértői véleményben foglaltak érvényességének meghosszabbításáról, esetleg módosításáról, kiegészítéséről, illetve indokolt esetben annak megszüntetéséről.

Górcső alá vettük, hogy a vizsgálati kérelemben jelzett problémák okainak feltárására irányuló vizsgálatokat elvégezték-e, történt-e matematikai vizsgálat, az milyen részterületeket érintett, és milyen vizsgálati megállapításokra jutott. Ezután a vizsgálati eredményeket összevetettük a fejlesztési javaslatokkal, elemeztük ezek összhangját vagy eltéréseit. Minden egyes szakértői véleményben megvizsgáltuk a gondolkodás dimenziójának megjelenését, az ezzel kapcsolatos megállapításokat és javaslatokat.

Eredmények

A vizsgálati eljárások jellemzői

A három nevelési tanácsadó gyógypedagógiai vizsgálata során matematikából egységesen az alábbi részterületeket vizsgálja: idői tájékozódás, téri tájékozódás, laterális, mennyiségállandóság, számjegy-számnév egyeztetése, műveletek az életkornak megfelelő számkörben (10-es, 100-as, 1000-es, 10 000-es), írásbeli műveletvégzések, szorzó- és bennfoglalótábla, egyszerű és összetett szöveges feladatok, számsorok szabályainak felismerése, a számsor folytatása. A matematikai gondolkodást vagy annak valamely speciális területét vizsgáló résztesztek nem állnak rendelkezésre. A pszichológiai vizsgálati részben a gondolkodási képességek mérésére a vizsgált nevelési tanácsadók a

Woodcock-Johnson Kognitív Képességek Tesztjét alkalmazzák. Klaszterei – Verbális képességek, Gondolkodási képesség, Kognitív hatékonyság – közül a Gondolkodási Képességek alteszt négy alpróbából áll, melyek a következők: „Emlékezés nevekre” (hosszú távú memória), „Hangmintázatok” (akusztikus észlelés és figyelem), „Téri relációk” (vizuális észlelés, analízis, szintetizálás), „Mennyiségi gondolkodás” (matematikai-logikai gondolkodás). A „Téri relációk” alteszt a téri orientációt és a vizuális ingerek analízisének és szintézisének képességét vizsgálja. A „Mennyiségi gondolkodás” alteszt az elvont fogalmak megértésére, a szabályok általánosítására és a következmények megfigyelésére fókuszál. A szakértői véleményekben ezek a vizsgált képességek analízis-szintézis, analógiás gondolkodás, és egy esetben kauzális gondolkodás megnevezéssel jelennek meg. A vizsgált 114 szakértői vélemény összesen 62 vizsgálati személy esetében állapít meg nehézséget a matematika területén (1. táblázat).

1. táblázat. Az összes szakértői vélemény és ezek közül a matematikai nehézséget is megállapító szakvélemények száma iskolánként és évfolyamonként

Évfolyam	Teljes minta		Első általános iskola		Második általános iskola		Harmadik általános iskola		Nyolcosztályos gimnázium	
	SZV	Mat	SZV	Mat	SZV	Mat	SZV	Mat	SZV	Mat
5.	21	12	9	9	6	2	6	1	-	-
6.	35	17	7	7	9	3	19	7	-	-
7.	30	22	9	8	6	3	12	9	3	2
8.	28	11	7	4	4	1	13	5	4	1
Összesen	114	62	32	28	25	9	50	22	7	3

Megj.: SZV: összes szakértői vélemény; Mat: matematikai nehézséget is megállapító szakvélemény

Három különböző körzetből összesen nyolc olyan esetet regisztráltunk, amikor az első komplex vizsgálatra érkező diáknál a szakértői bizottság nem végezte el a matematikai készségek felmérésére irányuló gyógypedagógiai vizsgálatokat. Bár a nyolcból öt alkalommal a vizsgálati kérelmet beküldő iskola pedagógusai nem matematikai problémákat jeleztek, a komplex vizsgálat része a matematikai képességek vizsgálata is. Ennek elmaradása feltáratlan problémákhoz, és így azok terápiájának elmaradásához vezethet. Ilyen eset az, amikor egy első vizsgálat alkalmával megállapítják, hogy a hatodikos diák vizuális differenciálása bizonytalan, vizuális tagolása a formák másolása esetén pontatlan, továbbá részképesség-gyengeség mutatkozik a vizuális differenciálás és emlékezet, valamint az auditív emlékezet területén. Ezzel együtt sem vizsgáltak matematikai készségeket az első komplex vizsgálat alkalmával, holott a felsorolt nehézségek többek között a számemlékezetet, a műveleti gondolkodást és a geometria területét egészében érinthetik. Hasonlóan hiányosan jártak el annak a hetedik osztályos diáknak az esetében is, akinél időbeli és síkbeli tájékozódás gyengeségét állapították meg, de a matematikai készségek vizsgálata ezzel együtt sem merült fel. Három olyan alkalommal is elmaradt a matematikai készségek vizsgálata, amikor az iskola, illetve a szülő a szakszolgálathoz eljuttatott vizsgálati kérelemben jelzi a matematikatanulásban jelentkező nehézséget a vizsgálatra küldött gyermek esetében. Egy hatodik osztályos, átlagos intellektusú diák a gondolkodási képességeket vizsgáló feladatokban az életkorától elmaradó szinten teljesített, tanulási nehézséget mégsem állapítottak meg nála, és megszüntették addigi BTMN státuszát.

*A matematikai szorongás hatása
a szakértői vizsgálat szereplőire és
a vizsgálati eredményre*

A BTMN szakvéleménnyel rendelkező diákok között az első általános iskola diákjainak 24%-ánál, míg a harmadik általános iskola diákjainak 56%-ánál nem találtak nehézséget a matematikai képességek területén. Az iskolák közötti nagy eltérésnek és a vizsgálati anomáliáknak az okát nem tudtuk feltárni, de az egyik iskola körzetében található szakszolgálat egykori munkatársának szóbeli közlése alapján ebben az intézményben évek óta nem dolgozik matematika specializációval rendelkező gyógypedagógus, a többi, nem matematikára szakosodott munkatárs pedig elutasította a matematika tesztfelvetelre irányuló képzésen való részvételt, így matematikai területet rendkívül ritka esetben vizsgálnak. Az elmúlt két tanévben három alkalommal együttnevelést segítő pedagógusok munkaközösségének meghívott előadóiént az előadásokat követő szakmai vitákban szembesültünk azzal a visszatérő érveléssel, hogy a szakszolgálati munkatársak közül sokan félnek a matematikai készségek vizsgálatától, mivel matematikából a saját tudásukat nem érzik biztosnak és kellően megalapozottnak. Ezek a közlések összhangban állnak Haase és munkatársai (2019), illetve Yulibeth (2011) kutatásainak korábban már ismertetett eredményeivel, amelyekben az általános iskolai tanítók többségét jellemző matematikai szorongás meglétére és annak következményeire mutatnak rá.

Ahogy arra Krajcsi (2010) rámutat, a Dékány-féle diszkalkulia teszt a tanuló által elért pontszámok helyett sokkal inkább a tesztet felvevő személy szakértelmére épít. Ugyanakkor felvetődik a kérdés, hogy, ha Yulibeth (2011), továbbá Haase és munkatársai (2019) kutatásai alapján arra is következtetünk, hogy a matematikai szorongás a gyógypedagógusok körében is megfigyelhető, akkor miként válik helyes diagnózist felállító szakemberré az a diagnoszta, aki maga is szorong a matematikától, és így a tőle is matematikával kapcsolatos tevékenységet megkövetelő helyzetektől. Ezt a megfontolást látszik alátámasztani az a tény, hogy a harmadik általános iskola körzetében található szakszolgálatban egyrészt alig diagnosztizálnak valakit matematikai nehézségekkel,

Ahogy arra Krajcsi (2010) rámutat, a Dékány-féle diszkalkulia teszt a tanuló által elért pontszámok helyett sokkal inkább a tesztet felvevő személy szakértelmére épít. Ugyanakkor felvetődik a kérdés, hogy, ha Yulibeth (2011), továbbá Haase és munkatársai (2019) kutatásai alapján arra is következtetünk, hogy a matematikai szorongás a gyógypedagógusok körében is megfigyelhető, akkor miként válik helyes diagnózist felállító szakemberré az a diagnoszta, aki maga is szorong a matematikától, és így a tőle is matematikával kapcsolatos tevékenységet megkövetelő helyzetektől. Ezt a megfontolást látszik alátámasztani az a tény, hogy a harmadik általános iskola körzetében található szakszolgálatban egyrészt alig diagnosztizálnak valakit matematikai nehézségekkel, másrészt több esetben a matematikai vizsgálatokat el sem végezték. További kutatási kérdést vetnek fel azok a már idézett szóbeli közlések, amelyek gyógypedagógusoktól származnak a saját matematikai szorongásuk kapcsán.

másrészt több esetben a matematikai vizsgálatokat el sem végezték. További kutatási kérdést vetnek fel azok a már idézett szóbeli közlések, amelyek gyógypedagógusoktól származnak a saját matematikai szorongásuk kapcsán.

A matematikai szorongás oka lehet a fejlődési diszkalkuliának is (Aschraft és Kirk, 2001, idézi Krajcsi, 2010), és ebből következően bármilyen, a matematikatanulásban fellépő, korábban nem tapasztalt nehézségnek. Krajcsi (2010) megjegyzi, hogy definíció szerint a rossz oktatás okozta számolási zavarok nem tekinthetők fejlődési diszkalkuliának. Mivel azonban hasonló tünetek is megjelenhetnek, nem zárjuk ki annak lehetőségét, hogy egy diagnosztikus vizsgálat helytelenül állapítja meg, hogy a számolási zavar nem a rossz oktatás következménye, hanem fejlődési diszkalkuliára utal.

A tanulmányban vizsgált diagnózisok szinte mindegyikében megjelenik a munkamemória kapacitásának problémája. Ugyanakkor annak alapján, hogy a matematikai szorongás ronthatja a megfelelő munkamemória kapacitását (Krisztián, 2016), elképzelhető, hogy egyes esetekben ez a probléma a matematikai szorongás következményeként jelenik meg a vizsgált tanulónál. Mivel ezt az összefüggést a vizsgálati eljárás során nem derítik ki, a terápia nem a matematikai szorongásra irányul, hanem a munkamemória fejlesztésére, azaz a fejlesztő pedagógus ilyen esetben nem a gyökereknél ragadja meg a problémát.

A matematikai képességek vizsgálata során feltárt nehézségek

A 114 vizsgálati véleményben mindössze öt alkalommal jelent meg a gondolkodás dimenziója az elvégzett vizsgálatok alapján készült összegzésben, vizsgálati véleményben. Ezen esetek mindegyikében matematikatanulási nehézséget is megállapítottak. Míg a harmadik általános iskola egy nyolcadikos diákjának szakvéleménye szerint a tanuló problémáit a felső tagozatos tananyag elsajátításában a gondolkodás implicit módon megfogalmazott nehezítettsége okozta, addig fejlesztési javaslatként mindössze a felső tagozatos matematika tananyag ismétlő-rendszerező feldolgozását javasolták. Ez a javaslat a fejlesztés helyett a korrepetálásra és a hagyományosan a korrepetálástól várt felzárkózásra helyezi a hangsúlyt, a gondolkodás dimenziója a fejlesztést végző szakember számára megfogalmazott útmutatásból már eltűnik. Ugyanez figyelhető meg további két szakvélemény esetében is. A nehézségek között még megállapították a gondolkodási dimenzió érintettségét, ám ez nem jelent meg a fejlesztési javaslatok között. Egy esetben megfelelő szintű matematikai gondolkodást állapítottak meg, ám a matematikai készségek vizsgálata nélkül, olvasás- és írásvizsgálatot végeztek, és Rey Auditív-verbális tanulási tesztet vettek fel. Korábbi évek vizsgálati anyagai nem álltak rendelkezésünkre, így feltételezhető az is, hogy abban szerepelt már matematikai vizsgálat, ugyanakkor a gondolkodási képességekben végbemenő változások vizsgálata is szükséges, főként, ha erre vonatkozóan megállapításokat fogalmaz meg egy szakvélemény. Egy olyan szakvélemény van – a harmadik iskola egy hatodikos diákja esetében –, ahol a megállapított gondolkodási nehézség fejlesztésére javaslatot tesznek, ám e javaslatához matematikai témakört is társítanak, azaz a gondolkodás fejlesztésére a szöveges feladatokat és a logikai feladatokat jelölik ki.

A szakvélemények 4%-a a matematikai vizsgálat során rögzített a gondolkodás nehezítettségére utaló tüneteket, de ezek terápiájára nem adott javaslatot. Ez fordult elő abban az esetben, amikor a matematikai vizsgálat során azt állapították meg, hogy a hatodik osztályos diák az összetett szöveges feladatok logikai finomságait nem észleli, ugyanakkor a vizsgálati eredmények összegzésében a problémák háttéréként mindössze a téri és síkbeli tájékozódás gyengeségeit sorolták fel.

A szakértői vélemények 8%-ában jelent meg a törtekkel kapcsolatos tudás felmérése, aminek keretein belül a törtekkel való műveletvégzést vizsgálták. Annak a tanulónak,

aki a törtéket diktálás után helyesen írja le, azok nagyságrendjében bizonytalan, egésze pótolni nem tudja őket, és a racionális törték összeadására csak akkor képes, ha közös a nevező, fejlesztési javaslatként a törtékkel való műveletek gyakorlását fogalmazták meg. A javaslat egyértelműen a procedurális tudásra fókuszál, amit nem előz meg a konceptuális tudás kialakítására, a megértésre tett javaslat (Nunes és Bryant, 2009).

Az első általános iskola 28 matematikai nehézséggel küzdő diákja közül 25 esetben rendre ugyanazt a vizsgálati véleményt fogalmazták meg: „tanulási nehézség, melynek hátterében a matematikai alapkészségek gyengeségei állnak”. A szakértői véleményekben ugyanakkor nem található meg a matematikai alapkészségek definíciója, illetve a készségek egységes katalógusa. E tanulók esetében a fejlesztés területeire tett javaslatban is mindössze a diagnózis megismétlése áll, a matematikai készségek fejlesztése.

Nunes és Bryant (2015) rámutat arra, hogy számos, a gyerekek matematikai képességeit vizsgáló teszt kizárólag, vagy szinte kizárólag a számfogalomra és az aritmetikai műveletek elvégzésének képességére koncentrálnak. A feldolgozott szakértői vélemények alapján elmondható, hogy a vizsgált szakszolgálatok gyakorlatában a magyar diszkalculia-vizsgálatok protokolljából is csak e területek felmérése valósul meg, a vizsgálati véleményekben és fejlesztési javaslatokban is csak elvétve jelenik meg más dimenzió, amely többek között a matematikai gondolkodást is magában foglalná. A tesztek a számfogalomra, az alpműveletek helyes algoritmusára (Nunes és Bryant, 2015), a rutineljárásokra (Verschaffel és mtsai, 2009), a percepcióra, az emlékezetre (Szabó, 1999) fókuszálnak, ezt mérik, és a fejlesztési javaslatokat is ezek alapján elsősorban a különböző matematikai műveletek gyakorlására, bevésésére vonatkozóan fogalmazzák meg. A szakirodalom alapján megállapítható, hogy e területek megfelelő fejlettsége a matematikai gondolkodás szükséges, de nem elégséges feltételei, ugyanakkor a szakértői véleményekből hiányoznak a további tényezők és feltételek, és ennek megfelelően egyetlen esetben sem készül el egy olyan komplex fejlesztési tervre tett szakértői javaslat, amelynek alapján a fejlesztést végző pedagógusnak majd dolgoznia kell.

A szakértői véleményekben javasolt fejlesztési területek

A kompetenciaalapú programcsomag (Fábián és mtsai, 2008) matematikai kompetencia meghatározásában tisztán elkülönül az, ami a szakértői vélemények javaslataiban megjelenik – azaz a négy alpművelet, a százalékszámítás és a törték használatának képessége és az a fejlettségi szint, amelynek megvalósulásához ezekre szükség van –, valamint a matematikai gondolkodáshoz kapcsolódó motívumok és attitűdök és ezek fejlesztési lehetősége. Ez utóbbi a szakértői vélemények vizsgálati eredményeiből és fejlesztési javaslataiból hiányzik (2. táblázat).

2. táblázat. A matematikai tartalom megjelenése a fejlesztő foglalkozások javasolt területei között pedagógiai szakszolgálatok szerinti bontásban

Az iskola körzetében működő pedagógiai szakszolgálat által kiállított szakértői vélemény	A matematikai tartalom megjelenése a fejlesztő foglalkozások javasolt területei között (az azonos tartalmú szövegváltozatok csak egyszer jelennek meg)
Első általános iskola	<ul style="list-style-type: none"> - matematikai készségek fejlesztése - matematikai alapkészségek fejlesztése
Második általános iskola	<ul style="list-style-type: none"> - számlálás 1000-es számkörben - írásbeli műveletvégzés gyakorlása - fejben számolás gyakorlása - alpműveletek műveletvégzési szabályának felfrissítése / alpműveletek gyakorlása - előjeles számokkal végzett műveletek gyakorlása - maradék megtartására technika kiépítése - maradék megtartásának gyakorlása - törtekkel végzett műveletek gyakorlása - sorozatok szabályának alkalmazása, megalkotása - szöveges feladatok megoldásához algoritmus tanítása - szöveges feladatok gyakorlása - matematika (hiánypótlások, pl. szorzás logikája, műveleti rendek stabilizálása) - logikai feladatok gyakorlása
Harmadik általános iskola	<ul style="list-style-type: none"> - számfogalom, helyiérték-fogalom megerősítése - elvont számolási készség fejlesztése kis számköröktől kezdve, analógiásan magasabb számkörökben - szorzó- és bennfoglaló tábla gyakorlása - szóbeli számolási műveletek készségszintű gyakorlása - írásbeli műveletek gyakorlása - írásbeli műveletekkel kapcsolatos matematikai tananyag hiányos elemeinek felfrissítése - a műveletek rendszeres gyakorlása - szöveges feladatok értelmezése modellezéssel - számolási készség fejlesztése (tízes átlépések készségszintű gyakorlása, a százas számkörbeli szóbeli műveletvégzési technika megerősítése, tudatosítása, gyakorlása megfelelő lépésekben, szorzó- és bennfoglalótábla gyakorlása, az írásbeli kivonás eljárásának megerősítése, gyakorlása, a további írásbeli műveletek gyakorlása, a feladatvégzések algoritmusának szabályozása az alaposabb, elmélyültebb és eredményesebb feladatvégzés érdekében) - a felső tagozatos matematika tananyag ismétlő-rendszerező feldolgozása, személyre szabottan, sok szemléltetéssel ismétléssel és gyakorlással (szöveges feladatok feldolgozása a mindennapokhoz szükséges matematikai kompetencia erősítésére, egyszerű százalékszámítás, egyszerű algebra, egyenletek stb. témakörökben)

Az iskola körzetében működő pedagógiai szakszolgálat által kiállított szakértői vélemény	A matematikai tartalom megjelenése a fejlesztő foglalkozások javasolt területei között (az azonos tartalmú szövegváltozatok csak egyszer jelennek meg)
Nyolcosztályos gimnázium	<ul style="list-style-type: none"> - számolástechnika, számolási eljárások - helyiérték-fogalom - fejszámolás készségszintre juttatása - írásbeli műveletek begyakorlása - szöveges feladatok értelmezése - számolási készség szinten tartása - 100-as körben számköri biztonság - 1000-es körben való tájékozódás - számlálás automatizálása - inverz műveletek - matematikai kifejezések értelmezése, használata - szám-memória fejlesztése - számtani absztrakciók - számtani emlékezet - összetett számtani feladatok - a matematika tantárgyhoz kötődő teljesítményszorongás enyhítése - osztályfoknak megfelelő megsegítés matematikából

A javasolt fejlesztési területek közül (ld. 2. táblázat) két olyan példát emelünk ki, melyek rámutatnak arra, hogy a rutineljárások rögzítése és gyakorlása mint fejlesztési cél nem bizonyul elegendőnek. A nyolcosztályos gimnázium körzetében működő szakszolgálat egy negyedikes diák esetében a matematikai nehézségek terápiájaként a számolástechnika, helyiérték-fogalom és szöveges feladatok értelmezése területeket jelöli meg. Két évvel később a felülvizsgálat során ugyanennek a diáknak a továbbra is fennálló, és a tanórákon egyre komolyabb lemaradáshoz vezető nehézségei miatt a matematika tantárgy értékelése alóli felmentésére tesznek javaslatot. Ugyanakkor terápiás célként ekkor már mindössze a számolási készség szinten tartását jelölik meg. Ugyanez a szakszolgálat egy másik diák esetében is felmentést javasol a matematikai teljesítményének értékelése és minősítése alól, ám fejlesztési területként mindössze a számolási eljárásokat jelöli meg. Verschaffel és munkatársai (2009) problémafelvetését, miszerint a matematika-oktatás célja sok esetben csupán a rutineljárások rögzítése, mindenképpen érdemes a fejlesztőpedagógiai gyakorlatot vizsgálva is megfontolni, hiszen a vizsgált, matematikai nehézséget is feltáró szakértői vélemények 89%-a mechanikusan fejleszthető megismerési folyamatokat (pl. percepció, emlékezet), rutineljárások rögzítését és gyakorlását (tízestlépés technikája, írásbeli műveletek begyakorlása stb.), vagy nem definiált alapvető matematikai készségek fejlesztését rögzíti fejlesztési javaslatként.

A percepció vizsgálata és fejlesztése kapcsán azonban fontos kiemelni, hogy a fejlesztőpedagógiai foglalkozáson minden gyermek esetében, akinek a szakvéleményében erre utaló hiányosságot rögzítenek, biztosított a percepció fejlesztése. Meggondolandó, hogy ezt az üdvözlendő gyakorlatot minden egyes fejlesztésre szoruló gyermek esetében érdemes lenne végezni, még hozzá azzal a tudatossággal, hogy a Dienes (2015) által megfogalmazott perceptív (észlelési) változatosság vagy többszörös konkretizálás elve egyik alapvető építőköve a matematikai gondolkodás fejlesztésének.

A 63 matematikai nehézséggel küzdő diák közül 56 esetében a szakértői vélemények az elemi szinten elhelyezkedő megismerési folyamatok fejlesztésére tesznek javaslatot anélkül, hogy ezeket egy nagyobb rendszer részeként értelmeznék, melynek része

a gondolkodás, a problémamegoldás is. Ugyanakkor Szabó (1999) gondolatmenetét követve éppen a magasabb szinten elhelyezkedő megismerési folyamatok működése során jön létre új mentális reprezentáció az elmében. E logika szerint a fejlesztőmunkából éppen az ítéletalkotás, a problémamegoldás, az absztrakció marad ki. A gondolkodás fejlesztésére összesen hét szakértői vélemény tesz javaslatot (3. táblázat).

A 3. táblázatban annak a hét tanulóknak a fejlesztésére tett szakszolgálati javaslatot szintetizáltuk, akik esetében a többnyire mechanikus gyakorlást igénylő tevékenységeken túl a gondolkodás dimenziója is megjelenik. Ezek a javaslatok többségében a diákok szövegesfeladat-megoldásának megfigyelése alapján fogalmazódtak meg, ahogyan erre egyértelmű utalást láthatunk a harmadik általános iskola egyik hatodik osztályos diákjának esetében. Ugyanakkor ugyanezen iskola ötödikes diákja esetében a matematikai gondolkodás fejlesztésére tett javaslatot részletesen is kifejtik, így itt sorolják fel az írásbeli műveletek korrigálását és gyakorlását is, mely önmagában inkább tekinthető egy algoritmus megjegyzésének és alkalmazásának, mint a gondolkodás fejlesztésének. A gondolkodás fejlesztésére tett javaslatok minden esetben előremutatóak, ugyanakkor előfordulásuk esetleges, mint ahogyan az is, hogy milyen megnevezéssel illetik őket.

3. táblázat. A gondolkodás fejlesztésére tett javaslatok az egyes iskolák diákjainak szakértői véleményében

Évfolyam	A gondolkodás fejlesztésére tett javaslatot tartalmazó szakvélemények száma évfolyamonként	A szakvéleménnyel rendelkező diák iskolája	A fejlesztő foglalkozások javasolt területei a szakvéleményben megfogalmazottak alapján
5.	3	első általános iskola	matematikai alapkészségek megerősítése (tízestáplés, műveleti technika, helyiérték fogalom, bennfoglalótábla, lényegkiemelés, analógiás és logikai gondolkodás, analízis-szintézis)
		második általános iskola	téri tájékozódás, inverz gondolkodás, matematika (hiánypótlások, pl. szorzás logikája, műveleti rendek stabilizálása)
		harmadik általános iskola	matematikai készségek, matematikai gondolkodás (írásbeli műveletek korrigálása, gyakorlása, ismétlése, szöveges feladatok értelmezése, megoldása modellezéssel, a megfelelő fokozatokkal)

Évfolyam	A gondolkodás fejlesztésére tett javaslatot tartalmazó szakvélemények száma évfolyamonként	A szakvéleménnyel rendelkező diák iskolája	A fejlesztő foglalkozások javasolt területei a szakvéleményben megfogalmazottak alapján
6.	3	harmadik általános iskola	<ul style="list-style-type: none"> - gondolkodás (lényegkiemelés, kauzális gondolkodás) - matematika (elvont számolás kialakítása a tízes számkörben a bontások megerősítésével, a tízes átlépés automatizálása, magasabb számkörben való szóbeli műveletvégzés kialakítása a diszkalkulia-terápia módszerével) - matematikából a számfogalmak kialakítása mellett az analízis-szintézis, szerialitás, figyelem, gondolkodás és emlékezet részterületek fejlesztése szükséges a diszkalkulia-terápia módszereivel - matematikai-logikus gondolkodás (szöveges és logikai feladatok)
7.	1	első általános iskola	figyelemkoncentrációs készség, kommunikációs készség, logikus gondolkodás, szerialitás, verbális memória, olvasástechnika, szövegértés

Javaslatok a fejlesztési területek kijelöléséhez

A matematika tanulásához alapvetően szükség van a számrendszeres gondolkodásra, a számrendszerek elveinek megértésére (Nunes és Csapó, 2011). A helyiérték-fogalom megerősítése, a számolási eljárások megértése és helyes alkalmazása ezen alapulva lehet sikeres. Bár a hagyományos írásbeli eljárások algoritmusának fontossága a 21. században már kérdéseket vet fel (Nunes és mtsai, 2009), ezek megértéséhez is alapvető a megfelelően fejlett számrendszeres gondolkodás. A mennyiség és a számok közötti kapcsolatok megértése, a mennyiségi gondolkodás fejlesztése szintén elsődleges a számolási eljárások készségszintű gyakorlásához képest (Thompson, 1993). A szakvélemények által megfogalmazott javaslatok éppen a számokkal végzett műveletek felől kívánják megközelíteni a matematikatanulási nehézségek leküzdését, és nem jelenik meg bennük az a szemlélet, hogy „az általános gondolkodási folyamatok és a számokkal kapcsolatos műveletek a matematikatanításban egymással összefüggő és egymást támogató tényezők. A mennyiségekben való gondolkodás minden esetben szükséges a numerikus reprezentáció működésének megértéséhez.” (Nunes és Csapó, 2011. 42.) Az additív gondolkodás, a multiplikatív és az arányossági gondolkodás fejlesztése szükséges a szöveges feladatok értelmezéséhez, és lényeges, hogy ezek megelőzzék a szöveges feladatok gyakorlását a fejlesztő órákon. Annak megértése, hogy Petinek öttel több cukorkája van, mint Katinak, additív gondolkodási stratégiát igényel, míg az a probléma, hogy Peti cukorkáinak a száma háromszorosa Kati cukorkái számának, a multiplikatív gondolkodás körébe tartozik (Nunes és mtsai, 2009). A gondolkodás e két formája mellett még az arányossági gondolkodás is kulcsszerepet játszik a matematikatanuláson túl

más – elsősorban természettudományos – tantárgyak megértésében és az ezekhez kapcsolódó feladatok elvégzésében (Nunes és Csapó, 2011). Racionális számokkal tudunk kifejezni egy egységénél kisebb mennyiségeket, melyek mérési és hányados helyzetekben is előfordulhatnak. Annak megértése, hogy törtekkel találkozhatunk rész-egész és hányados helyzetekben is, időben meg kell, hogy előzze a törtekkel való műveletvégzés elsajátítását, és így értelemszerűen annak gyakorlását is. A rész-egész viszony additív, a hányados helyzet megértése multiplikatív gondolkodást kíván (Nunes és Csapó, 2011). Szintén fontos szem előtt tartani, hogy a törtek ekvivalenciájának megértése szükséges a törtek összeadásához és kivonásához. A törtek többfajta értelmezésének megértése és a közöttük fennálló kapcsolat felfedezése lehet alapja a szakvéleményekben megjelenő fejlesztési javaslatok későbbi megvalósulásának, azzal a fontos kiegészítéssel, hogy mindezeket tapasztalati úton, manipulatív tevékenységekkel kell biztosítani a diák számára (Karika és Csíkos, 2018).

Az alapkészségek direkt módon történő, kontextusba nem ágyazott automatizálása, bevésése, mint ahogyan ez a fejlesztők számára megfogalmazott javaslatokban megjelenik, nem része az általunk bemutatott és érvényesnek tartott szakmai koncepcióknak. Fontos azonban látni, hogy többek között a NAT 2018-as tervezetének az az igénye, miszerint az 5–8. osztályos nevelési-oktatási szakasz végére a diákok rendelkezzenek azzal az eszközrendszerrel, amelyet alkalmazni tudnak különböző problémamegoldási eljárásokban, a szakértői vélemények javaslatainak többségéből is kiolvasható. Ezek a javaslatok is ezt az eszközrendszert jelölik meg mint fejlesztendő területet, ugyanakkor az ezt alkotó készségek elkülönülten, nem rendszerbe illesztve, és nem a végső cél, a matematikai gondolkodás fejlesztése felől megközelítve jelennek meg, többségében pedig ezek mechanikus fejlesztésére és a szimpla bevésésre fogalmazódnak meg ajánlások.

Az alapkészségek direkt módon történő, kontextusba nem ágyazott automatizálása, bevésése, mint ahogyan ez a fejlesztők számára megfogalmazott javaslatokban megjelenik, nem része az általunk bemutatott és érvényesnek tartott szakmai koncepcióknak. Fontos azonban látni, hogy többek között a NAT 2018-as tervezetének az az igénye, miszerint az 5–8. osztályos nevelési-oktatási szakasz végére a diákok rendelkezzenek azzal az eszközrendszerrel, amelyet alkalmazni tudnak különböző problémamegoldási eljárásokban, a szakértői vélemények javaslatainak többségéből is kiolvasható. Ezek a javaslatok is ezt az eszközrendszert jelölik meg mint fejlesztendő területet, ugyanakkor az ezt alkotó készségek elkülönülten, nem rendszerbe illesztve, és nem a végső cél, a matematikai gondolkodás fejlesztése felől megközelítve jelennek meg, többségében pedig ezek mechanikus fejlesztésére és a szimpla bevésésre fogalmazódnak meg ajánlások.

Összegzés

A tanulmány keretein belül áttekintettük az eredményes matematikaoktatáshoz szükséges célokat, a matematikai teljesítményt befolyásoló egyes tényezőket és a matematikai tanulási nehézségek mögött rejlő, a matematikaoktatásban gyökerező problémákat feltáró főbb kutatásokat. Dokumentumelemzést végeztünk négy eltérő célcsoporttal rendelkező iskola BTMN státuszú diákjainak szakértői véleményét vizsgálva abból a szempontból, hogy a matematikai gondolkodás vizsgálata és az ennek fejlesztésére tett javaslatok milyen támpontokat adhatnak a fejlesztőpedagógusi munkához. Az eredmények szerint a szakirodalomban feltárt nehézségek és hiányosságok jellemzik ezeket a dokumentumokat is. „Mindazok az ismeretek, amelyeket a tanulóknak a matematikában el kell sajátítaniuk, nem alakulnak ki egy lépésben. Ezért a matematikával összefüggő kognitív fejlődés felmérését úgy kell elvégezni, hogy a relációs számításokhoz viszonyítva kisebb követelményt támasszon a számolással szemben. A számolást a saját helyén lehet és kell értékelni” (Nunes és Csapó, 2011. 51.). Kutatásunk eredményei szerint a diagnosztikus vizsgálatok nem ezt az eljárást követik, fókuszukban a rutin-eljárások, a számfogalom és az alpműveletek helyes algoritmusa áll. A szakvéleményekben foglalt fejlesztési javaslatok a Campione és munkatársai által (1988) bemutatott gyakorlat megvalósulását tartalmazzák, miszerint a fejlesztő foglalkozások elsődleges célja az algoritmusok bevésése, a rutinszerű eljárások még intenzívebb gyakorlása. Ez az eljárás a már létező hátrányok csökkentéséhez nem a megfelelő út. Amennyiben azonban Ostad (2008) megállapításait érvényesnek fogadjuk el, úgy a fejlesztő foglalkozásokon az alapkészségek és alpműveletek tanórát kiegészítő, illetve támogató gyakorlását jelentős mértékben a matematikai gondolkodás fejlesztésével kell felváltani. A kutatás eredményei alapján megfogalmazható, hogy a matematikai gondolkodás fejlesztése együtt kell, hogy járjon az észlelési változatosság, a percepció, az ítéletalkotás, a problémamegoldás és az absztrakció mint megismerési folyamatok fejlesztésével. Fontos elősegíteni a számrendszerek elveinek, a mennyiségek és számok közötti kapcsolatoknak a megértését, akár a számolási eljárások rutinszerű gyakorlásának terhére. A szöveges feladatok megoldásához az additív, a multiplikatív és az arányossági gondolkodás fejlesztése felől javasolt közelíteni. A törtekkel való foglalkozásban a műveletvégzések gyakorlását feltétlenül meg kell előznie a törtek többfajta

A szakvéleményekben foglalt fejlesztési javaslatok a Campione és munkatársai által (1988) bemutatott gyakorlat megvalósulását tartalmazzák, miszerint a fejlesztő foglalkozások elsődleges célja az algoritmusok bevésése, a rutinszerű eljárások még intenzívebb gyakorlása. Ez az eljárás a már létező hátrányok csökkentéséhez nem a megfelelő út. Amennyiben azonban Ostad (2008) megállapításait érvényesnek fogadjuk el, úgy a fejlesztő foglalkozásokon az alapkészségek és alpműveletek tanórát kiegészítő, illetve támogató gyakorlását jelentős mértékben a matematikai gondolkodás fejlesztésével kell felváltani. A kutatás eredményei alapján megfogalmazható, hogy a matematikai gondolkodás fejlesztése együtt kell, hogy járjon az észlelési változatosság, a percepció, az ítéletalkotás, a problémamegoldás és az absztrakció mint megismerési folyamatok fejlesztésével.

értelmezésének és a törtek ekvivalenciájának felfedeztetése. Végül azt a minden fejlesztési területre érvényes módszertani eljárást szükséges ismételt hangsúlyozni, hogy a diák számára mindezeket úgy biztosítsuk, hogy a felismerésekhez tapasztalati úton, manipulatív tevékenységekkel jusson el, és ezt a folyamatot a saját gondolkodásának megfigyelése és tudatosítása kísérje végig.

Irodalom

- A Nemzeti alaptanterv tervezete. 2018. 08. 31. https://www.oktatas2030.hu/wp-content/uploads/2018/08/a-nemzeti-alaptanterv-tervezete_2018.08.31.pdf Utolsó letöltés: 2020. 05.03.
- Campione, J. C., Brown, A. L. & Connel, M. L. (1988). Metacognition: On the importance of understanding what you are doing. In Randall, I. C. & Edward, A. S. (szerk.), *Teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics. 93–114.
- Csapó Benő & Molnár Gyöngyvér (2012). Gondolkodási készségek és képességek. In Csapó Benő (szerk.), *Mérlegen a magyar iskola*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó. 407–440.
- Csikos Csaba & Kelemen Rita (2009). Matematikai szöveges feladatok nehézségének és érdekességének megítélése 5. osztályos tanulók körében. *Iskolakultúra*, 19(3–4), 14–25.
- De Corte, E. (1995). Fostering cognitive growth: A perspective from research on mathematics learning and instruction. *Educational Psychologist*, 30(1), 37–46. DOI: [10.1207/s15326985ep3001_4](https://doi.org/10.1207/s15326985ep3001_4)
- De Corte, E. (1997). A matematikatanulás és -tanítás kutatásának fő áramlatai és távlatai. *Iskolakultúra*, 7(12), 14–29.
- Falus Katalin & Vajnai Viktória (2012). *Kulcskompetenciák komplex fejlesztése: Modellek és jó gyakorlatok*. Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- Dienes Zoltán Pál (2015). *Építsük fel a matematikát*. Budapest: Edge.
- Fábián Mária, Lajos Józsefné, Olasz Tamásné & Vidákovich Tibor (2008). *Matematikai kompetencia-terület: Szakmai koncepció*. Educatio Kht.
- Freudenthal, H. (1963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques? *L'Enseignement Mathématique*, IX, 28–44.
- Haase, V. P., Guimarães, A. P. L. & Wood, G. (2019). Mathematics and emotions: The case of math anxiety. In Fritz, A., Gerald Haase, V. & Räsänen, P. (szerk.), *International handbook of mathematical learning difficulties*. Springer. 469–503. DOI: [10.1007/978-3-319-97148-3_29](https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_29)
- Karika Timea & Csikos Csaba (2018). A törtfogalom fejlődésének segítése az alsó és a felső tagozat határán. *Gyermeknevelés*, 6(1), 86–98. DOI: [10.31074/gyn201818698](https://doi.org/10.31074/gyn201818698)
- Krajcsi Attila (2010). A numerikus képességek zavarai és diagnózisuk. *Gyógypedagógiai Szemle*, (2), 93–113.
- Krisztián Ágota (2016). Matematikai nehézséggel küzdő gyerekek fejlesztő módszerének kidolgozása és hatásvizsgálata. *PhD-értekezés*. PTE BTK Pszichológiai Doktori Iskola, Pécs.
- Kuncz Eszter, Mészáros Andrea, Mlínkó Renáta, & Nagyné Réz Ilona (2008). A szakértői vizsgálati munka protokollja. In Mesterházi Zsuzsa (szerk.), *Inkluzív nevelés. Kézikönyv a szakértői bizottságok működéséhez*. Budapest: Educatio – SuliNova.
- Mesterházi Zsuzsa (1995). A tanulási képességről és a tanulási akadályozottságról. *Gyógypedagógiai Szemle*, 23(1), 12–33.
- Molnár Gyöngyvér (2006). Az induktív gondolkodás fejlesztése kisiskolás korban. *Magyar Pedagógia*, (1), 63–80.
- Molnár Gyöngyvér (2008). Kisiskolások induktív gondolkodásának játékos fejlesztése. *Új Pedagógiai Szemle*, (5), 51–64.
- Molnár, G. & Csapó, B. (2019). Making the psychological dimension of learning visible: Using technology-based assessment to monitor students' cognitive development. *Frontiers in Psychology*, 10, 1368. DOI: [10.3389/fpsyg.2019.01368](https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01368)
- Morsanyi, K. & Szucs, D. (2014). The link between mathematics and logical reasoning. In Chinn, S. (szerk.), *The Routledge international handbook of dyscalculia and mathematical learning difficulties*. London: Routledge. 101–114.
- Nunes, T. & Bryant, P. (2015). The development of mathematical reasoning. In Lerner, R. M. (szerk.), *Handbook of child psychology and developmental science: Cognitive processes*. Wiley. 715–762. DOI: [10.1002/9781118963418.childpsy217](https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy217)
- Nunes, T. & Bryant, P. (2009). Key understandings in mathematics learning. Paper 3: *Understanding rational numbers and intensive quantities*. London: Nuffield Foundation.
- Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2009). Key understandings in mathematics learning. Paper 1: *Overview*. London: Nuffield Foundation.

Nunes Terezinha & Csapó Benő (2011). A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése. In Csapó & Szendrei (szerk.) *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó. 17–58.

Ostad, S. A. (2008). Children with and without mathematics difficulties: Aspects of learner characteristics in a developmental perspective. In Dowker, A. (szerk.), *Mathematical difficulties: Psychology and intervention*. Academic Press. 143–156. DOI: [10.1016/b978-012373629-1.50009-5](https://doi.org/10.1016/b978-012373629-1.50009-5)

Polgárdi Veronika, Láz Csabáné & Dékány Judit (2018). Alapismeretek a diszkalkulia pedagógiai vizsgálatáról. *Gyermeknevelés*, (1), 24–54. DOI: [10.31074/gyn201812454](https://doi.org/10.31074/gyn201812454)

Radványi Katalin (2011). A kompetencia alapú fejlesztés értelmezése a kognitív képességek jelentős elmaradása esetén. *Gyógypedagógiai Szemle*, 39(1), 1–21.

Szabó Csaba (1999). *Gondolkodás*. Debrecen: KLTE BTK.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 165–208. DOI: [10.1007/bf01273861](https://doi.org/10.1007/bf01273861)

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeys, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, (3), 335–359. DOI: [10.1007/bf03174765](https://doi.org/10.1007/bf03174765)

Yulibeth, D. Z. O. (2011). Habilidades de pensamiento matemático en alumnos de educación básica. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, 26(3). <http://www.eumed.net/rev/ced/26/yzdo.htm> Utolsó letöltés: 2020. 05. 03

Absztrakt

Az 5–8. osztályos BTMN státuszú diákok fejlesztésének egyik megoldatlan, ám a sikeres fejlesztéshez feltétlenül szükséges területe a gondolkodás fejlesztése. Miután a különböző tantárgyak közül leginkább a matematikaórán valósul meg a gondolkodási képességek fejlesztése (Molnár és Csapó, 2019), ezért a tanulmány keretein belül azt a kérdést vizsgáltuk, hogy a magyarországi fejlesztőpedagógiai foglalkozásokon explicit vagy implicit módon, de szerepel-e a matematikai gondolkodás fejlesztése a kitűzött célok között. A tanulmány első felében összefoglaltuk az eredményes matematikaoktatáshoz szükséges célokat, áttekintettük a matematikai teljesítményt befolyásoló főbb tényezőket és a matematikai tanulási nehézségek mögött rejlő, a matematikaoktatásban gyökerező problémákat feltáró kutatásokat. Dokumentumelemzést végeztünk négy eltérő célcsoporttal rendelkező iskola BTMN státuszú diákjainak szakértői véleményét vizsgálva abból a szempontból, hogy a matematikai gondolkodás vizsgálata és az ennek fejlesztésére tett javaslatok milyen támpontokat adhatnak a fejlesztőpedagógusi munkához. Az eredmények szerint a szakirodalomban feltárt nehézségek és hiányosságok fellelhetők ezekben a dokumentumokban is. A feldolgozott szakértői vélemények alapján elmondható, hogy a vizsgált szakszolgálatok gyakorlatában a matematikai képességek vizsgálata és az ennek alapján megfogalmazott fejlesztési javaslatok elsősorban a számfogalomra és az aritmetikai műveletek elvégzésének képességére koncentrálnak. E területek megfelelő fejlettsége a matematikai gondolkodás szükséges, de nem elégséges feltételei, ugyanakkor a szakértői véleményekből hiányoznak a további tényezők és feltételek, melyek nélkül nem készülhet komplex fejlesztési tervre tett szakértői javaslat. A tanulmány mintegy vitaindítóként kívánja felhívni a figyelmet e hiányosságok lehetséges okaira, és a gyakorlatban rejlő buktatókra.