Iskolakultúra, 26. évfolyam, 2016/7–8. szám DOI: 10.17543/ISKKULT.2016.7–8.63

Mákné Karika Tímea

Szent Lőrinc Katolikus Általános Iskola, Budapest

Racionális hibák a törtes műveletvégzés során

Az 5. osztályosok törtreprezentációi és a műveletvégzés során elkövetett racionális hibák

Írásunk egy empirikus kutatásra összpontosít, amelynek témája a közönséges törtekkel végrehajtott műveletek végzése közben előforduló hibák feltérképezése. A matematikai gondolkodás fejlődése során létrejövő racionális hibákat kerestük. Ben –Zeev (1998) nevezte így a hibákat, amelyek úgy jönnek létre, hogy a gyermek korábbi ismereteire építve analógiát keres a megoldandó probléma esetén, de rosszul következtet, amit utána „jól" használ. A kutatás célja az volt, hogy megmutassuk, hogy a közönséges törtek tanulása során kialakulnak a szakirodalomban bemutatott hibák, és a matematika tudásszintmérő teszten alacsony eredményt érnek el azok a tanulók, akik ilyen hibákat követnek el. A kutatást 5. osztályosok körében végeztük.

A matematikai gondolkodás fejlődését és fejlesztését vizsgálva azt tapasztalhatjuk, hogy természetes módon a legprecízebb munka mellett is bizonyos hibák megjelennek. A hibás matematikai gondolkodás (amely majdnem olyan, mint a helyes) során létrejövő hibákat nevezte *Ben – Zeev* (1998) racionális, észszerű hibáknak. A hibák kutatása elősegíti, hogy megismerjük a matematikai gondolkodás fejlődését.

A tanulmány azt tűzte ki célul, hogy feltérképezzük, hogy a közönséges törtekkel végzett műveletek során milyen hibák alakulnak ki, és mi lehet ennek az oka. A korosztály kiválasztásának szempontja az volt, hogy a törtek tanulásának elején vizsgáljuk meg a tanulók törtreprezentációját, műveletvégzését és a kialakuló hibákat. Magyarországon ugyan alsó tagozaton elkezdődik a törtfogalom kialakítása, de ötödik osztályban kezdenek a törtekkel műveleteket végezni. Az aktuális kerettanterv (*OFI*, 2012) a törtfogalom kialakításával kezdi a témakör felépítését. A vizsgálat eszközének a tudásszintmérést választottuk. A kutatás két hipotézise, hogy megjelennek a szakirodalomban leírt hibák a tesztekben és a hibákat elkövető gyermekek teszteredményei gyengék. Feltárjuk, hogy a magyar pedagógia kutatói hogyan rendszerezték a hibákat, és milyen okokat jelöltek meg. Kiegészítjük a jelenkori nemzetközi kutatások eredményeivel. A hibák feltárásával és rendszerezésével sok új információhoz juthatunk, amely a magyar matematikaoktatás eredményesebbé tételéhez járulhatna hozzá, ha a gyakorló pedagógusok látnák, hogy milyen okai vannak egyes gyermekek sikertelenségének, jelen esetben a közönséges törtek témakörben. *Torbeyns, Schneider, Xin és Siegler* (2015) arra a megállapításra jutott, hogy a törtek nagyságának megértése és az általános matematikai teljesítmény összefügg. Vizsgálatukban az országspecifikus különbségek ellenére minden vizsgált országban (USA, Kína, Belgium) pozitív kapcsolatot mutattak ki a törtek nagyságának megértése és az általános matematikai teljesítmény között. Ezek az eredmények arra utalnak, hogy beavatkozásra lehet szükség az oktatásban.

Az elmúlt évek nemzetközi méréseiből tudjuk, hogy Magyarország egyre gyengébben teljesít mind a PISA, mind a TIMSS mérésein. A PISA a munkaerő-piaci beváláshoz szükséges alkalmazható tudást méri, a TIMSS kifejezetten a tantervekre épít, és elsősorban az elméleti tudást méri. A PISA eredményeink folyamatosan romló tendenciát mutatnak, a TIMSS esetében még a résztvevő OECD országok átlaga felett teljesítünk, de nincs szignifikáns különbség. A negyedik osztályos tanulók átlageredményeit láthatjuk az *1. táblázat*ban. Ez a korosztály áll legközelebb a kutatásunkban szereplő tanulókhoz. A tanulók 2011-es adatait vizsgálva azt láthatjuk, hogy a 2007-es és 1995-ös eredményekhez képest nem volt szignifikáns változás az eredményükben, a 2003-as mérésben részt vevő negyedikesekhez képest azonban szignifikánsan gyengébben teljesítettek.

1. táblázat: A TIMSS mérések átlageredményei (4. osztály)

év	*átlageredmény*
1995	521
2003	529
2007	510
2011	515

Bár a TIMSS nem kifejezetten összpontosít a törtek megértésére, a kulturális és az oktatási különbségek valószínűleg befolyásolják a törtek tanulását (*Torbeyns, Schneider, Xin és Siegler,* 2015).

A TIMSS 2011 nemzetközi jelentése szerint mind a három tartalmi területen és mind a három kognitív területen egyaránt a nemzetközi átlag felett teljesített Magyarország a negyedik osztályosok esetén –lásd *2. táblázat* (*Mullis, Martin, Foy és Arora*, 2012).

2. táblázat: A magyar és a nemzetközi eredmények a tartalmi és kognitív területeken

ország	*Matematika átlag*	*Matematika tartalmi keretek*			*Matematika kognitív területek*		
		Számok	*Geometria*	*Adatábrázolás*	*Ismeret*	*Alkalmazás*	*Értelmezés*
Magyarország	55%	51%	56%	63%	60%	54%	45%
Nemzetközi átlag	50%	47%	49%	58%	55%	50%	40%

Tudjuk, hogy az általános kognitív képességek fejlesztése a mai rendkívül gyorsan változó világban különösen fontos. Örvendetes, hogy az átlag felett teljesítünk, de a cél az eredmények javítása lenne. Ha feltárjuk, hogy melyek a hibák okai, akkor a hibák megfelelően javíthatók, és az által jobb eredményt érhetünk el.

A matematikai gondolkodás hibáinak hazai kutatástörténete

A következőkben elsősorban a közönséges törtekkel végzett műveletekkel kapcsolatos hibák kutatásának bemutatására összpontosítunk. Már *Beke Manó* (1900) is azt említi a Magyar Pedagógiai Társaság székfoglaló beszédében, hogy bizonyos hibák a tanítás során évről-évre ismétlődnek. Ezek nem csak egy-egy tanulónál fordulnak elő, hanem igen sok gyermeknél. Ezeket nevezte Beke Manó typikus hibának, amelyek a tanítás és a matematikai gondolkodás különböző területein jelennek meg. Beke három forrásból eredezteti a hibákat.

- A hamis, vagy elhamarkodott analógia: amikor a feltételeket más esetekben fennálló feltételekkel megegyezőnek vélünk, de nincs teljes egyezés.
- A következtetés hibájából és a tételek elhamarkodott megfordításából eredő hiba.
- A szemlélet hiányosságából eredő hiba.

A törtszámokkal végzett műveletek során is jelennek meg typikus hibák. Ilyen a hamis analógia alapján elkövetett hiba, mikor 1 kg termék árából úgy következtet $\frac{3}{4}$ kg árára, hogy az 1 kg árát elosztja $\frac{3}{4}$ - del. A hiba onnan ered, hogy $\frac{1}{4}$ kg árát úgy is megkaphatta korábban, ha az eredeti árat osztotta néggyel. Ugyancsak gyakran előfordul, hogy a gyermek azt hiszi, hogy a tört értéke nem változik meg, ha a számlálójához és a nevezőjéhez ugyanazt a számot hozzáadja.

A mértékegységváltások során a tanulók gyakran nem biztosak benne, hogy mikor szükséges a váltószámmal szorozni és mikor osztani. Ezt a hibát Beke szerint az értelem nélküli mechanizmus okozza.

Az analógiákra természetesen szükség van, de a feltételeket pontosan szükséges megadni, hogy a hibát elkerüljük. Ugyanígy szükséges, hogy bizonyos dolgok mechanikussá váljanak, de ezek számát szorítsuk minimumra, és váljon értelmessé a mechanizmus elsajátítása.

A 20. század során néhány magyar kutató foglalkozott a hibakutatással, de ez a század utolsó évtizedeire és különösen a 21. századra teljesen elhalkult Magyarországon. *Pólya György* (1945) és *Mosonyi Kálmán* (1972) is úgy gondolja, hogy a matematika a gondolkodás fejlesztésének nagyszerű iskolája. Mosonyi szerint nagyon fontos, hogy a tanárnak annál inkább nem elég a tananyagot ismernie, minél alacsonyabb évfolyamon tanít, hanem az elsajátítás gondolkodási folyamatát is ismernie kell. Magyar területen *Ranschburg Pál* (1917) foglalkozott először hibakutatással, aki beszéd-, írás-, és számoláshibákat vizsgált. Arra jutott, hogy a legegyszerűbb számolási művelet megoldása is gondolkodás eredménye, nincs olyan, hogy csak az emlékezetre alapozza valaki a számolást. *Szenes Adolf* (1934) a négy alapművelet végzése során elkövetett hibákat vizsgálta. *Faragó László* (1958) a középiskolákban előforduló hibákat osztályozta. *Mosonyi Kálmán* (1972) a gondolkodási hibákat a következőképpen csoportosította:

1. helytelenül feltételezett analógián alapuló hibák 2. formalizmuson alapuló hibák 3. megszokáson alapuló hibák 4. fogalmak tisztázatlan voltából erdő hibák 5. hiányos előismeretek által okozott hibák 6. matematikai műszavakból, szakkifejezésekből eredő hibák

Ezek közül a törtek esetében az alábbi hibákról tesz említést.

1. helytelenül feltételezett analógián alapuló hibák

A gyermek ott is analóg szituációt sejt, ahol nincs. Mellőzi az alapos gondolkodást. Közönséges törtek esetén a tört fogalmának megismerése után gondolhatja rosszul, hogy $\frac{1}{7} > \frac{1}{5}$ mivel az egész számok esetén 7 > 5 Ennek oka: lehet, ha nem foglalkoztak eleget a fogalom kialakításával.

Ugyanígy az $\frac{1}{2}$ - et kisebbnek gondolhatja pl. a $\frac{27}{98}$ -nál, mert abban nagyobb számok vannak. Vagy nem ismeri fel, hogy $\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$

2. megszokáson alapuló hibák
A szorzás növel, az osztás csökkent a természetes számok körében. Ellenérzést kelthet a gyermekben, ha egynél kisebb törttel szoroz vagy oszt, mert ebben az esetben nem ez történik. $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ illetve $6 : \frac{1}{2} = 12$

3. fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák
A törtek összeadásakor a törtet nem egy, hanem két számnak tekinti és így adja össze. A hiba domináns oka, hogy a gyermek ilyenkor nem törtet ad össze, hanem egész számot.

pl. $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{3}{11}$

Mosonyi kísérletében a különböző nevezőjű törtek összeadásakor sem volt magasabb a hiba aránya. Ugyanezen az elven alapszik az a hiba, ha a tört szorzásakor bővítést végez.

$$\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{15}$$

4. hiányos előismeretek által okozott hibák
Természetes dolog, ha egy gyermek hiányos előismerettel áll egy matematikai probléma előtt – legyen az új ismeret, vagy alkalmazás –, a hiány hibaforrásként fog szerepelni, akkor is, ha nem értette meg kellőképpen a fogalmat és akkor is, ha nem rögzített ismeretről van szó.

Ez után magyar területen feledésbe merült a hibakutatás. Az elmúlt évtizedekben született meg az igény a matematikatudás újfajta értékelésére. A korábbi formatív értékelés mellett megjelent a diagnosztikus értékelés is. Ennek keretében a szegedi műhelyben kidolgozásra kerültek a tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez. Itt találkozunk újra a racionális számokkal. *Nunes és Csapó* (2011) vizsgálja az egész számok és a racionális számok körében a kognitív fejlődést. Tanulmányuk több területen támaszkodik az elmúlt években megjelent nemzetközi szakirodalomra.

Racionális hibák

A tanulók gyakran egy ismeretlen probléma megoldása során visszanyúlnak egy számukra érthető algoritmushoz. Ilyen például, ha a törtek összeadásakor közvetlenül összeadják a számlálókat és nevezőket (*Silver,* 1986). Ezt *Mosonyi* (1972) a fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibának nevezi.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

Az ilyen és ehhez hasonló hibás algoritmusokat használva keletkező hibákat nevezte *Ben-Zeev* (1998) racionális, észszerű hibának. Ebben az esetben a tanulók egy helytelen szabályt állítanak elő, amit utána helyesen használnak. Ezen hibák megjelenése gyakori. Ennek oka nem az, hogy a tanárok helytelen algoritmust tanítanak. A tanulók a matematika tanulás során hozzák létre saját szabályaikat. *Schoenfeld* (1988) azt feszegeti, hogy a tanulók esetleg „túltanulják” a korábbi tanítást? Tovább általánosítanak az előzetes tanításból. Például a kivonásnál a kisebbet a nagyobból elvet követve hibásan vonnak ki a többoszlopos kivonási probléma esetén is.

$$\begin{array}{r} 63 \\ -\,29 \\ \hline 46 \end{array}$$

A törtek helytelen összeadásáról *Silver* (1986) úgy gondolja, hogy a tanulók egy hibás algoritmust kivetíthetnek a törtek reprezentációjának tradicionális tanításából. Gyakran reprezentálják a tanárok a törteket rész-egészként, például torta feldarabolásával. Jelen esetben az $\frac{1}{2}$ egy két darabból álló torta egyik része, az $\frac{1}{3}$ egy három darabból álló torta egyik része. Az összeadásnál gondolkodhat úgy a gyermek, hogy két darabom van az öt részből álló tortából. Ez a hiba értelmezhető úgy, hogy a törtek torta-reprezentációját sokszor gépiesen tanítják és a gyerekek szisztematikus szabályt keresnek.

Empirikus vizsgálatok eredményei

Ebben a részben olyan kutatások eredményeit mutatjuk be, amelyek az elmúlt években születtek. Nemzetközi szinten számos kutató vizsgálja, hogyan fejlődik a gyermekek matematikai gondolkodása. Itt a racionális számokhoz kapcsolódó gondolkodás fejlődését és a kialakuló hibákat, a hibák forrásaival foglalkozó kutatásokat tekintjük át.

A racionális számok reprezentációi

Marshall (1993) öt különböző területét vázolta fel a racionális számok reprezentációinak:
(a) rész-egész, ami azt az esetet hangsúlyozza, hogy a részt az egész mennyiséggel hasonlítjuk össze;
(b) arány, amiben különböző mennyiségeket mérünk össze;
(c) hányados, ami kiemeli a folyamatot vagy az osztás eredményét;
(d) mérés; amely a racionális szám nullától való távolságát hangsúlyozza; és a
(e) művelet, amely azt a szituációt hangsúlyozza, amiben a racionális számoknak, mint a mennyiségek növelő/csökkentő szerepe van.

A magyar oktatási gyakorlatban gyakran az első értelmezést használják, illetve kisebb mértékben a másodikkal is találkozunk. A többi értelmezés is megjelenik, de ezek tudatosítása gyakran elmarad, amely okozhatja azt, hogy a törtek ezen reprezentációi nem megfelelő módon alakulnak ki a gyermekeknél.

Ezt az öt terület reprezentációját használta fel *Moseley és Okamoto* (2008) az amerikai negyedik osztályos gyermekek körében végzett racionális szám-reprezentáció vizsgálatában. A tanulmány az átlagosan, az átlag felett és a kimagaslóan teljesítő amerikai negyedik osztályos diákok racionális szám problémamegoldását és megértését vizsgálta. Az eredmények azt mutatták, hogy a kimagaslóan teljesítő diákok szignifikánsan magasabb pontszámot értek el a problémamegoldásban és sokkal jobb a racionális szám reprezentációjuk, mint a másik két csoportban. Az eredmények arra utalnak, hogy a sikeres racionálisszám-problémamegoldás összefonódik a racionális számok széles körű reprezentációs tudásával. Megállapították, hogy az amerikai diákok nagy része nem rendelkezik megfelelő racionális szám reprezentációval és a matematikai reprezentációk megértése fontos a matematikatanulásban.

Egy nemzeteken átívelő összehasonlításban (TIMSS) a vizsgálatok megerősítették, hogy az amerikai diákoknak általában gyenge a racionális szám megértése (*Mullis és mtsai*, 1997), de különösen, ha a különböző reprezentációk közötti kapcsolatokat kellett azonosítani. Ezzel szemben a kiemelkedő teljesítményű nemzetek diákjai, mint a szingapúri vagy japán, rugalmasabban értelmezték a racionális számokat (*Brenner és mtsai*, 1997; *Mullis és mtsai*, 1997). Úgy látszik, hogy az ott használt tankönyvek gyakrabban mutatják meg a racionális számok reprezentációi közötti kapcsolatokat. Részben ez lehet a magyarázata annak, hogy az ázsiai diákok miért teljesítenek jobban a nemzetközi vizsgálatokban.

A tanulók megértése növekedett, ha többféleképpen tanították a törteket, nem csak rész-egész helyzetben (*Moseley*, 2005). Az eredmények akkor is javultak, ha a szorzás, osztást hozzákapcsolták a racionális számokhoz. Ezek alapján a diákoknak lehetőséget kell biztosítani, hogy több szempontból vizsgálják meg a racionális számokat, hogy képesek legyenek olyan rugalmas reprezentációra, amelyek kulcsfontosságúak a racionális számok megértésében.

A racionális szám fogalmának fejlődése

McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen, és Lehtinen (2015) 3–6. osztályosok körében vizsgálták a racionális számok fogalmának fejlődését. Szerintük a racionális számok megértéséhez két dolog szükséges.

a) A racionális számok nagyságának reprezentációi, és hogy
b) a racionális számok végtelen sűrűn helyezkednek el.

A nagysági reprezentációs tudás szükséges, de nem elégséges a sűrűségi fogalmakhoz. A vizsgálat azt mutatta, hogy csak néhány diáknál jelent meg a racionális számok megértése, különösen a sűrűségi fogalom.

Annak ellenére, hogy a természetes számok számos tulajdonságát lehet általánosítani (*Torbeyns, Schneider, Xin, és Siegler*, 2015), a racionális számok tanulása és megértése kihívást és komoly nehézséget jelent a legtöbb tanuló számára. Az egyik probléma, hogy a természetes számok nem minden tulajdonságát lehet kiterjeszteni a racionális számokra. Így a racionális számok megértése nem egyszerűen a természetes számok mélyebb megértése. A racionális számok megértése jelentős változást jelent a számfogalomban. Például: a törtszám kisebb részt jelent, ha nagyobb a nevezője; bármely két szám között mindig végtelen sok szám van; és nem tudjuk megmondani, hogy mi a következő szám a racionális számok sorozatában. Mindezek a fogalmak ellentétben állnak a természetes számokról tanultakkal. Így mély és jelentős koncepcionális változásra van szükség ahhoz, hogy teljes mértékben megértsék a racionális számok természetét, és ez a változás nehezen megy.

A racionális számok tanulásának egyik problémája, hogy míg korábban egy számot egyféleképp jelöltünk, most egy számot végtelen sokféleképp leírhatunk.

$$0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}500 = \ldots = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$$

A nagysági problémák abból adódnak, hogy míg például a természetes számoknál $65 > 7$ ez nem igaz az 1,65 és 1,7 esetén. Itt nem teljesül, hogy a több számjegy nagyobb számot jelent.

Még komolyabb fogalmi változásra van szükség, hogy a racionális számok sűrűségét megértsék (*Vamvakoussi és Vosniadou,* 2004; *Vamvakoussi és Vosniadou*, 2010). A két fő különbség a sűrűségben a számok sorrendje és a következő szám jelenléte. A természetes számok különálló mennyiségként vannak jelen a gyermek fejében (*Ni és Zhou,* 2005). De a racionális számok nem egy különálló sorozat. Míg a természetes számoknál mindig meg tudjuk mondani a következő számot, ezt a racionális számoknál nem tudjuk megtenni.

A természetes számok és a racionális számok mentális reprezentációi közötti különbségek

Van Dooren, Lehtinen és Verschaffel (2015) úgy találták, hogy a tanulók racionális szám megértése nehézségének több lehetséges forrása is lehet. Egy aktív kutatás középpontjában ennek a nehézségnek az egyik különös magyarázata áll, a természetes számok hatása (*Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof és Verschaffel*, 2013).

A tanulók implicit vagy explicit módon azt feltételezik, hogy a természetes számoknál megismert funkciók továbbra is alkalmazhatók a racionális számoknál. A természetes számok körében megismert tulajdonságok alkalmazása a racionális számok esetén hibát okozhat. Négy fő területet különböztetnek meg, ahol ilyen szisztematikus hibák jelennek meg.

Az első a racionális szám nagyságának meghatározása, ami más elveken alapszik, mint a természetes számok esetén. Például, amikor két törtet hasonlítunk össze, már nem működik a számlálási szekvencia, amely a természetes számokra vonatkozik (1, 2, 3 …). Sok tanuló feltételezi, hogy amikor a tört nevezője, számlálója, vagy mindkettő növekszik, akkor a teljes tört értéke is növekszik.

Másodszor, amikor aritmetikai műveleteket végeznek racionális számokkal, és az váratlan eredményt ad. Ilyenkor az alsó tagozaton megtanult tulajdonságokat próbálják alkalmazni, miszerint a szorzás növel, az osztás csökkent. A törtekkel való szorzás, osztás esetén nincs így, ha a tört értéke kisebb egynél. A törtek esetén helytelenül feltételezik ezt.

Harmadszor, míg a természetes számoknak csak egy szimbolikus ábrázolása van, addig a racionális számoknak több (törtek valamint tizedestörtek), és az egyes kategóriákon belül e két nagy reprezentációs típusoknak akár végtelen számú lehetséges formája lehet (pl. $0{,}75 = 0{,}750 = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = \ldots$). Kimutatták azt is, hogy a tanulók gyakran nem látják a közönséges és a tizedes törtek között a különbséget (*Vamvakoussi, Van Dooren és Verschaffel*, 2012).

Negyedszer, mivel a természetes számok diszkrétek (azaz, meg tudjuk mondani, hogy melyik szám után melyik következik), addig a racionális számok végtelen sűrűn helyezkednek el (azaz nem tudjuk megmondani, hogy egy szám után melyik következik). Számos tanulmány kimutatta, hogy a tanulók nehezen értik meg, hogy a két tört vagy tizedes tört között végtelen sok szám van.

A törtek megértésének központi szerepe a matematikai eredményekben

Torbeyns, Schneider, Xin és Siegler (2015) már korábban említett vizsgálatában nem csak arra a megállapításra jutott, hogy a törtek nagyságának megértése és az általános matematikai teljesítmény összefügg, hanem ez az összefüggés a törtes műveleteknél is megmarad. Ez a kijelentésük alátámasztja azt, hogy a törtek megértésének központi szerepe van a matematikai teljesítményben. Továbbá jelzi, hogy a nagyság megértésének központi szerepe van a numerikus fejlődésben.

A numerikus fejlődés integrált elmélete (*Siegler, Thompson és Schneider*, 2011) azt állítja, hogy a numerikus megértést és az aritmetikai készségeket könnyebb elsajátítani az egész számok esetén, mint a törteknél. Továbbá a törteknek és az egész számoknak olyan fontos közös vonásaik vannak, amelyek a különbségekben jelennek meg. A diákoknak mindkét esetben meg kell tanulniuk, hogyan értelmezzék nagyság szerint a számokat, és a nagyság szerinti megértésnek központi szerepe van az általános matematikai kompetenciában.

A legújabb TIMSS mérések megállapítása kimutatta (Mullis és mtsai, 2012), hogy számos kulturális különbség van a matematika tanításában és tanulásában. A részt vevő országok – köztük Belgium, Kína és az Egyesült Államok – nem csak a tanárképzésben, a tapasztalatban, és a karrier elégedettségben különböznek, hanem az iskolai matematikatanítás mennyiségében és minőségében is és a tanulók iskolán kívüli matematikai tapasztalataiban is. Sőt, ezek a kulturális és oktatási különbségek szorosan összefüggnek a 4. és 8. osztályosok teljesítményével a matematika területén.

A numerikus fejlődés integrált elmélete két területen különbözik a fogalmi váltás elméletétől. Az egyik, hogy elismeri az egész szám nagyság tudás pozitív szerepét a törtek tanulásában. A második, hogy az egész szám tudás csak egyik forrása a törtek tanulása nehézségének.

A legújabb TIMSS mérések megállapítása kimutatta (*Mullis és mtsai*, 2012), hogy számos kulturális különbség van a matematika tanításában és tanulásában. A részt vevő országok – köztük Belgium, Kína és az Egyesült Államok – nem csak a tanárképzésben, a tapasztalatban, és a karrier elégedettségben különböznek, hanem az iskolai matematikatanítás mennyiségében és minőségében is és a tanulók iskolán kívüli matematikai tapasztalataiban is. Sőt, ezek a kulturális és oktatási különbségek szorosan összefüggnek a 4. és 8. osztályosok teljesítményével a matematika területén.

A törtek tanítása során előforduló hibák áttekintése

Ha végigtekintünk az elmúlt bő száz év kutatásain, megállapíthatjuk, hogy már *Beke Manó* (1900) igen jól látta, hogy a hibákkal foglalkozni szükséges és a hibák okát illik felderítenünk. Ő még csupán három területet említ a hibák forrásaként. *Mosonyi* (1972) már hat területre bontja a hibák okát. A közönséges törtekkel kapcsolatban megállapíthatjuk, hogy a négy alapművelet végzése során felmerülő hibákra koherens rendszert dolgozott ki. A műveletvégzés során elkövetett hibákkal foglalkozott *Silver* (1986), aki olyan algoritmus használatát említi, ami számukra érthető, és ezt próbálják ismeretlen helyzetben használni. *Ben – Zeev* (1998) ezt racionális hibának nevezi. *Schoenfeld* (1988) pedig azt feszegeti, hogy a gyerekek esetleg túltanulják a korábbi tanítást, és ebből származnak a hibás algoritmusok. Ugyanakkor a tört fogalmának kialakulásával kapcsolatban megjelenő hibák felderítéséhez a legújabb kori kutatásokra is szükségünk van. Megjelenik már Mosonyinál az a helytelen analógia, amely szerint gondolhatja a gyermek, hogy $\frac{1}{7} > \frac{1}{5}$ az egész számokról következtetve 7>5 alapján. Ez a mai nemzetközi szakirodalomban természetes szám hatásként szerepel (*Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof és Verschaffel*, 2013). Ennek már négy hatását mutatja be (*Van Dooren, Lehtinen és Verschaffel* 2015), hogy a törteknél nem működik a számlálási szekvencia és a törtek nem diszkrét számok. Az aritmetikai műveletek nem mindig úgy működnek, mint azt megszoktuk a természetes számoknál. Például a szorzás nem mindig növel, az osztás nem mindig csökkent. A törteknek végtelen sok alakja lehet. Ez utóbbi kettőt már Mosonyi is bemutatta, és ugyancsak helytelen analógiának illetve a megszokáson alapuló hibának nevezte. További jelenkori kutatás azt is feltárta, hogy nem csak az probléma a törtek megértésénél, hogy nem diszkrétek, de sokan azt sem értik, hogy végtelen sűrűn helyezkednek el, és nem tudjuk megmondani, hogy mi a következő tört (*Ni és Zhou*, 2005). Az elmúlt évek kutatásai mutattak rá arra is, hogy a törteknek öt reprezentációja lehet (*Marshall*, 1993). Minél többféleképp mutatjuk meg a gyermeknek, hogy mit jelenthet a tört, annál inkább megértheti a tört fogalmát. Ez a mai magyar matematikaoktatás feladata lehet. Már *Mullis és munkatársai* (1997) kimutatták, hogy azoknak az országoknak a diákjai (Távol-Kelet) jobban teljesítenek a matematika teszteken, ahol többféle reprezentációt tanítanak. Továbbá a különböző reprezentációk közötti kapcsolatok azonosítása nehéz a gyermek számára. Növekszik a megértés, ha többféleképp tanítjuk (*Moseley*, 2005).

A vizsgálat módszerei

A minta

A mérésben 118 ötödik osztályos gyermek vett részt. A minta nagyságának megválasztása során figyelembe vettük *Csíkos* (2009) tanulmánya szerinti ajánlást, miszerint kvantitatív empirikus kutatásoknál az optimális mintanagyság 100 fő vagy ennél nagyobb legyen. A korreláció elméleti értékének becslése ekkora mintanagyság esetén használható kellő hatékonysággal. Továbbá a többváltozós összefüggés-vizsgálatokban minimum ekkora mintanagyság ajánlott. A főváros egyik külső kerületének egyházi iskolájából 3 párhuzamos ötödik osztály 61 tanulója, akik heti 4 órában tanulják a matematikát és semmilyen szempontból nem szelektált gyerekek. Továbbá Kecskemét egyik általános iskolájának 57 ötödikes tanulója. Itt a két osztály között különbség volt, az egyik osztály matematika tagozatos, és heti 5 órában tanulják a matematikát, a másik osztályt azok alkotják, akik nem választották a matematika tagozatot, ők normál tanterv szerint haladnak, és heti négy matematika órájuk volt.

A mérőeszköz

A kutatás elsődleges eszköze egy tudásszintmérő teszt volt. Összeállítása során a kerettantervi követelményeket vettük figyelembe (*OFI*, 2012). A cél az volt, hogy olyan taxonómia rendszert alkossunk meg, amely teljes mértékben lefedi az ötödik osztályos közönséges törtek témakört. A mérést egy tesztfejlesztés előzte meg, amelynek célja az volt, hogy egy magas reliabilitású tesztet hozzunk létre, amely lefedi a közönséges törtek témakört. Ezt sikerült végrehajtani. A tesztben szereplő 10 feladat 49 itemet tartalmazott, a reliabilitása (Cronbach- α) 0,942 lett, ami megfelel az adott célnak. A feladatok között szerepelt törtek értelmezése, egyenlő és különböző számlálójú, nevezőjű törtek összehasonlítása, egyszerűsítése, bővítése, tört helyének megjelölése a számegyenesen, tört átírása vegyes szám alakban és vissza, törtek nagyság szerinti sorba rendezése, törtes mértékegységváltás, tört szorzása és osztása egész számmal, törtek és vegyes számok összeadása, kivonása és egy összetett törtes szöveges feladat. Az alkalmazási kritérium alacsonyabb követelményszintjei jelentek meg a feladatokban. Egyaránt találunk zárt és nyílt feladatokat. A feladattípusokat tekintve zárt feladatok között találunk illesztést, relációválasztást, feleletválasztást, sorba rendezést. A nyílt feladatok között az átalakítás és a kivitelezés több formája jelent meg. A teszt felépítése követte a tananyag struktúráját.

Az eredmények bemutatása

A matematika tudásszintmérő teszt elemzése

A tesztet 118 tanuló írta meg. Az összteljesítmény átlaga 71 százalékpont (szórása 22%) volt. 50% alatt teljesített a tanulók 18%-a, 50% és 70% között a tanulók 23%-a, 70% és 90% között a tanulók 35%-a és 90% felett a tanulók 24%-a. Tehát az eredmények eloszlása erősen jobbra tolódott. Ennek magyarázata lehet, hogy nagyvárosok tanulóit vizsgáltuk, továbbá a törtek témakör olyan alapozó szakaszában történt a mérés, hogy elvárható, hogy jó eredmények szülessenek. Minden további törtes műveletekben való sikeresség kulcsa, hogy megfelelő legyen az alapok lefektetése.

A feladatok százalékos megoldottságát és reliabilitását vizsgálva azt tapasztaljuk – *3. táblázat* –, hogy három feladat megoldottsága van az átlag alatt. Ugyanannak a matematikai struktúrának a feladattá alakítása többféle formában lehetséges. A tesztben voltak formális kivitelezésű és szövegbe öltöztetett feladatok is. A legnehezebbnek a szöveges feladat bizonyult, aminek igen magas a reliabilitása. Ez az eredmény összhangban áll *Csíkos és Kelemen* (2009) tanulmányával, amiben a feladatok nehézségének megítélését vizsgálták, és a szövegbe öltöztetett feladatot nehezebbnek találták az 5. osztályos gyermekek ugyanazon feladat aritmetikai alakjához képest. A második legnehezebb feladat a mértékegységváltás volt. Tudjuk, hogy igen sok problémát okoz a tanulóknak, és a nem kedvelt feladatok közé tartozik. A mértékegységváltás a természettudományok elsajátításában is alapvető jelentőségű (*B. Németh, Korom és Nagy*, 2012), ezért ennek vizsgálata is figyelmet érdemel. A harmadik legnehezebb feladat, amely megoldottsága még az átlag alatt volt, a kilencedik feladat, amely 11 olyan itemet tartalmazott, amelyek formális kivitelezésűek. Egyenlő és különböző nevezőjű törteket és vegyes számokat adtak össze és vontak ki. Legtöbben az egyenlő nevezőjű törtes műveleteket tudták megoldani. Ha kivonás szerepel a műveletsorban, még a közös nevezőre hozás sem olyan sikeres, mintha egy összeadást tartalmazó műveletsorban szerepel. Vegyes számot tört alakba a gyerekek alig több mint fele tud átírni. A feladaton belül a legnehezebbnek a vegyes számokkal végzett kivonás bizonyult.

3. táblázat: A tudásszintmérő teszt feladatai nehézség szerint

Feladat	*Megoldottsága (%)*	*Reliabilitása*
2. törtek összehasonlítása	83,55	0,660
5. vegyes szám átírása törtté és vissza	82,03	0,803
1. tört értelmezése	81,36	0,634
8. tört szorzása és osztása egész számmal	80,50	0,143
3. tört egyszerűsítése, bővítése	80,00	0,839
6. törtek összehasonlítása, sorképzés	79,94	0,620
4. tört helye a számegyenesen	78,13	0,852
9. törtek összeadása és kivonása	63,55	0,907
7. mértékegységváltás	58,05	0,809
10. összetett szöveges törtes művelet	48,51	0,995

Ha a teszt összpontszámára és a teszt feladataira regresszióanalízist végzünk, akkor azt kapjuk, hogy a tíz feladatból nyolc feladat adja a megmagyarázott variancia 94,1%-át. Ezt a *4. táblázatban* láthatjuk. A három legnagyobb magyarázó erejű feladat a három legnehezebb is egyben, bár nem nehézségi sorrendben, hanem pont fordítva találjuk ebben a vizsgálatban.

4. táblázat: A tudásszintmérő teszt összpontszámában a feladatok magyarázó ereje

Feladat	*r*	*β*	*r·β*	*r·β·100 (%)*
9. törtek összeadása és kivonása	0,757	0,342	0,259	25,9
7. mértékegységváltás	0,769	0,193	0,148	14,8
10. összetett törtes művelet	0,698	0,174	0,122	12,2
3. tört egyszerűsítése, bővítése	0,732	0,144	0,105	10,5
5. vegyes szám átírása törtté és vissza	0,717	0,131	0,094	9,4
4. tört helye a számegyenesen	0,610	0,151	0,093	9,3
2. törtek összehasonlítása	0,691	0,110	0,076	7,6
1. tört értelmezése	0,555	0,080	0,044	4,4
6. törtek összehasonlítása, sorképzés	0,441	0,083	0,036	3,6
8. tört szorzása és osztása egész számmal	0,451	0,053	0,023	2,3
Összes megmagyarázott variancia			1	100%

A legnagyobb magyarázó erővel a kilencedik feladat bír, amelyben egyenlő és különböző nevezőjű törtekkel és vegyes számokkal végeztek összeadásokat, kivonásokat. S mint majd a későbbiekben látni fogjuk, a három legnehezebb, illetve legnagyobb magyarázó erejű feladat szolgáltatja a legtöbb racionális hibát.

A tudásszintmérő tesztben megjelenő racionális hibák

Mosonyi (1972) helytelenül feltételezett analógiának, *Beke* (1900) pedig hamis analógiának nevezi, amikor a gyermek egyenlő számlálójú törtek közül azt gondolja nagyobbnak, amely nevezője nagyobb, pusztán azon tulajdonság alapján, amit a természetes számoknál megismert. A nemzetközi szakirodalomban *Torbeyns, Schneider, Xin, és Siegler*, (2015) is kiemeli, hogy ha nagyobb számot lát (a nevezőben), nagyobbnak gondolja. Relációválasztással döntötték el a gyerekek, hogy melyik a nagyobb, helytelenül:

$$\frac{8}{7} \boxed{>} \frac{8}{5}$$

A rossz választ adók teszteredményének átlaga 24,93 pont az elérhető 49-ből. Köztük találjuk szinte az összes nagyon gyengén teljesítő tanulót. Többségében 20 és 35 pont között teljesítettek. Van továbbá 3 olyan gyermek, aki egyenlőnek gondolja ezeket a törteket. A szakirodalom ilyet nem említ, de ha *Mosonyi* (1972) hiányos előismeretekből származó hibáira gondolunk, akár gondolkodhatott úgy is, hogy egyenlő számlálókat lát, akkor egyenlőek, hiszen így hasonlítunk össze egyenlő nevezőjű törteket. A szabályt nem tanulta meg alaposan. Ehhez az itemhez kapcsolódik a 6. feladat harmadik iteme, amelyben törteket állítanak nagyság szerinti sorba, és ott egyenlő számláló szerint szükséges hasonlítani. A 26 helytelen választ adó közül 17-en ezt is elrontották. Mindannyian 35 pontnál kevesebbet értek el a teszten, vagyis ők gyengébben teljesítenek, és valóban nem tudnak egyenlő számlálójú törteket összehasonlítani. A többieknél lehetséges figyelmetlenségi hiba, vagy bizonytalan még a tudásuk.

A második feladat ötödik itemében azt vártuk, hogy felismeri, hogy $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$. Mindkét hibás válasz előfordult, de többségében úgy gondolták, hogy

$$\frac{3}{4} \boxed{<} \frac{6}{8}$$

A helytelenül alkalmazott analógia alapján azt gondolják nagyobbnak, amely nagyobb számokat tartalmaz. 30-an adtak rossz választ, és ebből 21-en a $\frac{3}{4} < \frac{6}{8}$ relációt választották. Mindannyian 30 pontnál kevesebbet értek el a teszten. *Nunes és Csapó* (2011) szerint döntő fontosságú a törtek összeadása, kivonása szempontjából, hogy a gyerekek értsék, hogy a különböző alakú törtszámok azonos mennyiségeket fejeznek ki. Továbbá a nemzetközi kutatások azt mutatják, hogy a törtek ekvivalenciájának megértése nem minden tanuló számára könnyű (*Behr, Wachsmuth, Post és Lesh*, 1984; *Kerslake,* 1986). A fentiek szerint feltételezhetjük, hogy a racionális hiba megjelenése összefügg a gyengébb teszteredménnyel.

Az ötödik feladatban egynél nagyobb törteket írtak át vegyes szám alakba és vegyes számot tört alakba. Azt vizsgáljuk, hogy a vegyes számot értelmezi-e valaki úgy, mintha szorzásjel lenne az egészrész és a törtrész között, azt az analógiát követve, amit az algebrai kifejezéseknél, ha nem írunk semmit, akkor az szorzást jelent. Megjelent ez a hiba is mindkét item esetén.

$4\frac{3}{8} = \frac{12}{8}$ $\qquad$ $1\frac{2}{7} = \frac{2}{7}$

Továbbá volt, aki tudta, hogy az egészrészt és a törtrészt össze kell adni, de a törtet nem különböztette meg az egésztől. Így az alábbi hibák születtek:

$4\frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ $\qquad$ $1\frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

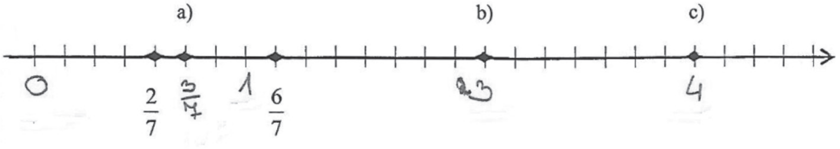
Mindössze négy ilyen dolgozat volt, amikben ezeket a hibákat felfedeztük. Jellemzően egy-egy hibával. Egy gyermeknél jelent meg ugyanaz a hiba két item esetén. Az elért pontszámaik: 21; 26; 27; 27.

A hatodik feladatban nagyság szerinti sorba rendeztettük a törteket. Az összehasonlítást egyenlő nevezőjű, egyenlő számlálójú illetve egynél kisebb és nagyobb törtek esetén vizsgáltuk. Kilenc olyan tesztet találtunk, amelyekben pont fordított sorrendben szerepelnek a törtek nagyság szerint. Nekik a törtek nagyságának értelmezésével vannak problémáik, ahogyan ezt *Van Dooren, Lehtinen és Verschaffel* (2015) említi.

$\frac{9}{4} \qquad \frac{9}{8} \qquad \frac{5}{7} \qquad \frac{3}{7}$

$\frac{9}{4} < \frac{9}{8} < \frac{5}{7} < \frac{3}{7}$

Marshall (1993) öt területet emel ki, ahol a törteket értelmezi. Ezek közül az egyik a mérés, ahol a tört 0-tól való távolságának megértését várjuk a gyermektől. A negyedik feladatban ezt vizsgáltuk. *Moseley és Okamoto* (2008) szerint a sikeres racionális szám problémamegoldás összefonódik a racionális számok széles körű reprezentációs tudásával, amelyben ez a terület is szerepet játszik.



A feladat öt iteméből az első háromnál a tört nagyságát kérdeztük. 17 olyan tanulót találtunk, akik egyik tört értékét sem tudták megmondani. A teszteredményük átlaga 23 pont. A feladat negyedik és ötödik itemében a 0 és az 1 helyének megjelölését kértük. 19 olyan tanuló van, aki sem a 0 sem az 1 helyét nem tudta jól megjelölni a számegyenesen. Az ő teszteredményeik átlaga 24,5 pont. Továbbá 11 olyan tanuló van, akik mindkét területen sikertelenek voltak. Az összes leggyengébben teljesítő tanuló szerepelt mindkét hibát elkövetők között. Természetesen egy-egy itemet lényegesen többen rontottak el, de ezeknél a tanulóknál feltételezzük, hogy valóban nem értik a tört 0-tól való távolságát, illetve az egység fogalmát. Beigazolódni látszik *Moseley és Okamoto* (2008) állítása ezek között a gyerekek között is.

A hetedik feladatban mértékegységváltást végeztettünk. *Beke* (1900) szerint az értelem nélküli mechanizmusnak tudható be, ha a gyermek nem tudja, hogy a váltószámmal szorozni, vagy osztani kell. A feladat harmadik és negyedik itemében fedezhetünk fel ilyen hibát.

c) 1 dl = 10 l d) 100 g = 10 kg

20 ilyen tanulót találunk, több esetben mindkét itemet ilyen módon rontották el. Az átlagosan vagy kicsivel az átlag felett teljesítő diákokra volt jellemző ez a fajta hiba. Az itemek megoldottsága lényegesen alacsonyabb, 60% és 51% volt.

Mosonyi (1972) a fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibának nevezi, ha a tanuló a törteket úgy adja össze, hogy a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel. Ilyenkor nem egy, hanem két számnak tekinti a gyermek a törtet. A következő tesztrészletben nem csak az összeadásokban, hanem a kivonások esetén is megjelenik a hiba, keveredve azzal, amit *Schoenfeld* (1988) említ, hogy a korábbi ismereteiből úgy általánosít, hogy a nagyobb számból vonja ki a kisebbet. Hat olyan tanulót találunk, akiknél egy-egy itemnél jelenik meg ilyen hiba, illetve két tanuló van, akinél az egész kilencedik feladaton végigvonul ez a racionális hiba. A teszten nyújtott teljesítményük nagyon gyenge (10 és 11 pont).

$\frac{17}{15}+\frac{4}{15}+\frac{26}{15}=\frac{47}{45}$ $\frac{4}{3}-\frac{2}{9}=\frac{2}{6}$ $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}=\frac{7}{18}$ $1\frac{2}{4}+2\frac{5}{8}=\frac{7}{12}$ $2\frac{3}{14}-1\frac{4}{7}=\frac{1}{21}$

A szöveges feladatban találkozhatunk a következő hibával.

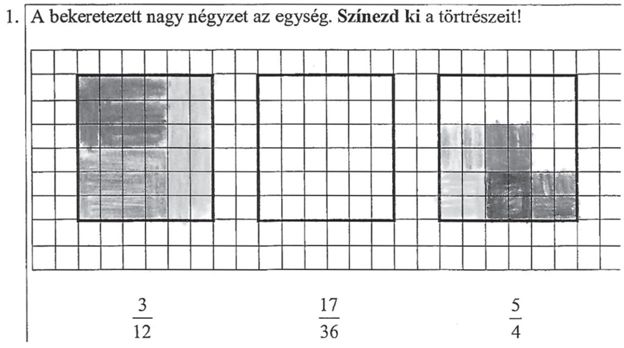
10. **Mártonék a nyaralójuk kertjének egy részét szeretnék újra füvesíteni.
Három darab fél kilogrammos és egy darab negyed kilogrammos fűmagot vásároltak.**

**Összesen hány kilogramm fűmagot vásároltak Mártonék?
Eredményedet számítással igazold!**

$1 : \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

Beke (1900) ezt olyan tipikus hibának nevezi, amit hamis analógia alapján követnek el, amikor a tanuló 1 kg termék árából úgy következtet $\frac{3}{4}$ kg árára, hogy az 1 kg árát elosztja $\frac{3}{4}$-del. A hiba onnan ered, hogy $\frac{1}{4}$ kg árát úgy is megkaphatta korábban, ha az eredeti árat osztotta néggyel. Ebben a feladatban a gyermek komoly szövegértési problémával is küzd. A feladat szövegében valóban megtalálható a „három" és a „negyed" szó. A fenti módon hamisan következtet, de hogy mire, az nem derül ki.

Az első feladatban a tört nagyságát ábrázoltattuk. Egy gyermeknél tapasztaltuk, hogy egyáltalán nem alakult ki nála a tört fogalma. További 4 tanulónál tapasztaltuk, hogy egy-egy itemnél nem sikerült a tört nagyságának ábrázolása, és ehhez hasonló hibát követtek el. A bemutatott példában a $\frac{3}{12}$ -et úgy értelmezi, hogy 3 darab 12 egységből álló rész. Az $\frac{5}{4}$-et 5 darab 4 egységből álló részként ábrázolja. Különböző színeket használ. Valószínűleg ez akadályozta meg a $\frac{17}{36}$ ábrázolásakor. Akár még jól is sikerülhetett volna ez neki, ha nem ragaszkodik a 17·36 egységhez.



A nyolcadik feladatban tört szorzása és osztása történt egész számmal. Mindkét esetben előfordult, hogy szorzás illetve osztás helyett bővítést végeztek. Hat ilyen esetet figyelhetünk meg a tesztek között. Ebből egy tanuló mindkét hibát elkövette, a többiek egy kivételével az elsőt.

$$\frac{2}{7}\cdot 3=\frac{6}{21} \qquad \text{illetve} \qquad \frac{5}{8}:4=\frac{20}{32}$$

Ezt *Mosonyi* (1972) a fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibának nevezi.

A tört osztásánál előfordult az a hiba is, hogy a tört nevezőjét osztották el, *Mosonyi* (1972) szerint a tudatosítás hiánya miatti helytelen analógia okozza.

$$\frac{5}{8}:4=\frac{5}{2}$$

14 olyan tanulót találtunk, akik ezt a hibát követték el. Közepesen illetve jól teljesítettek a teszten. Felszínesen tanulták meg a szabályt, a tudatosítás elmaradt.

Összegzés

A szakirodalomban bemutatott valamennyi racionális hibára találtunk példát a mérés során, annak ellenére, hogy összességében jó eredmények születtek a teszten.

A racionális hibákat elkövető gyerekekről azt feltételeztük, hogy a teszteredményeik gyengék lesznek. A hibák legnagyobb részét elkövető tanulók gyengén vagy közepesen teljesítettek. Egyes hibák csak néhány tanulónál fordultak elő. A legtöbb racionális hibát adó feladat a mértékegységváltás volt. 20 olyan tanulót találtunk, aki nem tudta, hogy a váltószámmal szorozni vagy osztani kell. Két olyan hiba jelent meg, ami a jól teljesítő tanulókra jellemző. Az első hiba nem került említésre a szakirodalomban, viszont hatan elkövették: . $\frac{8}{10}=\frac{4}{20}$ Náluk valószínűleg már rögzült a szabály, hogy a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal az egész számmal szorozzuk vagy osztjuk, de nem vették észre, hogy az egyik esetben osztottak, a másik esetben szoroztak. A másik hiba, amit a közepesen és jól teljesítő tanulók követtek el, amikor törtet osztottak egész számmal, a nevezőt osztották el. A racionális hibákat elkövető tanulók jelentős része valóban gyengén teljesített a teszten.

Jelen kutatás nagyon kis szeletét tárta fel a matematikaórákon előforduló racionális hibáknak. Csupán a közönséges törtek körében, elsősorban 5. osztályban előforduló hibákra összpontosított. Több irányba folytatható a vizsgálódás. Gyűjthetünk tipikus hibákat a matematika más témaköreiben, más évfolyamokon, longitudinális vizsgálatokat indíthatunk egyes hibák változásának nyomon követésére. A papír–ceruza módszer mellett alkalmazhatjuk a kikérdezést, hogy mit gondolt, amikor valamilyen racionális hibát elkövetett. Így feltárhatjuk, hogy a különböző reprezentációk hogyan alakulnak ki a gyermek fejében. Ha arra törekszünk, hogy gyermekeink minél jobb eredményt érjenek el a matematikában, akkor meg kell keresnünk az általuk elkövetett hibák forrását, és az oktatás során nagyobb figyelmet kell szentelnünk arra, hogy megfelelő mentális reprezentációkat alakítsunk ki. Ha tisztában vagyunk azzal, hogy milyen helytelen következtetéseket tehetnek gyermekeink, akkor a hibákat észrevehetjük, és hatékonyabban javíthatjuk, ezáltal a későbbiekben jobb eredmény elérésére lesznek képesek.

Ha arra törekszünk, hogy gyermekeink minél jobb eredményt érjenek el a matematikában, akkor meg kell keresnünk az általuk elkövetett hibák forrását, és az oktatás során nagyobb figyelmet kell szentelnünk arra, hogy megfelelő mentális reprezentációkat alakítsunk ki. Ha tisztában vagyunk azzal, hogy milyen helytelen következtetéseket tehetnek gyermekeink, akkor a hibákat észrevehetjük, és hatékonyabban javíthatjuk, ezáltal a későbbiekben jobb eredmény elérésére lesznek képesek.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Csíkos Csabának a tanulmány alapjául szolgáló szakdolgozatomhoz fűzött értékes kritikai megjegyzéseit.

Irodalom

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post T. R. és Lesh, R. (1984): Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, **15**. 323–341. DOI: 10.2307/748423

Beke Manó (1900): Typikus hibák a mathematikai tanításban. *Magyar Pedagógia*, **9**. 520–530.

Ben-Zeev, T.(1998): Amikor a hibás matematikai gondolkodás majdnem olyan, mint a helyes: racionális hibák. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete.* Vince Kiadó, Budapest 65–86.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Smith-Reed, B. és mtsai. (1997): Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra. *American Educational Research Journal,* **34.** 663–689. DOI: 10.2307/1163353

B. Németh Mária, Korom Erzsébet, Nagy Lászlóné (2012): A természettudományos tudás nemzetközi és hazai vizsgálata. In: Csapó Benő (szerk.): *Mérlegen a magyar iskola*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 131–191.

Csíkos Csaba (2009): *Mintavétel a kvantitatív pedagógiai kutatásban*. Gondolat Kiadó, Budapest.

Csíkos Csaba és Kelemen Rita (2009): Matematikai szöveges feladatok nehézségének és érdekességének megítélése 5. osztályos tanulók körében. *Iskolakultúra*, **19**. 3−4. sz. 14−25.

Faragó László (1958): A logikus gondolkodásra való nevelés terén elkövetett didaktikai hibák a középiskolai matematikatanításban. *Tanulmányok a neveléstudomány köréből.* Budapest

Kerslake, D. (1986): *Fractions: Children´s Strategies and Errors: A Report of the Strategies and errors in secondary Mathematics Project*. NFER-Nelson, Windsor

Marshall, S. P. (1993): Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. *In:* Carpenter, T. P., Fennema, E. és Romberg, T. A. (szerk..): *Rational Numbers: An Integration of Research.* Hillsdale, NJ: Erlbaum. 261–288. DOI: 10.4324/9780203052624

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., és Lehtinen, E. (2015): Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction* **37**. 14–20. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2013.12.004

Moseley, B. (2005): Students' Early Mathematical Representation Knowledge: The Effects of Emphasizing Single or Multiple Perspectives of the Rational Number Domain in Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics,* **33**. 37–69. DOI: 10.1007/s10649-005-5031-2

Moseley, B. és Okamoto, Y. (2008): Identifying Fourth Graders´Understanding of Rational Number Representations: A Mixed Methods Approach. *School Science and Mathematics* **108.** 238–250. DOI: 10.1111/j.1949-8594.2008.tb17834.x

Mosonyi Kálmán (1972): *Gondolkodási hibák az általános iskolai matematika órákon.* Budapest, Tankönyvkiadó.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Kelley, D. L., *és* Smith, T. A. (1997): *Mathematics achievement in the primary school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS). *Boston: Boston College.*

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P. és Arora, A. (2012): *TIMSS 2011 International Results in Mathematics.* TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, Chestnut Hill

Ni, Y. és Zhou, Y.D. (2005): Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, **40.** 27–52.

Nunes, T. és Csapó Benő (2011): A matematikai gondolkodás fejlesztése és fejlődése. In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.): *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 17–58.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., Verschaffel, L. (2013) The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, **28.** 64–72. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2013.05.003

OFI (2012): 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 2. melléklete: *Kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára: Matematika.* Budapest.

Pólya György (1945/ 1994): *A gondolkodás iskolája.* Budapest, Typotex Kiadó.

Ranschburg Pál (1917): *Az iskolás gyermekek olvasási és számolási nehézségei a kísérletek fényében.* Budapest

Schoenfeld, A. H.(1988): When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of „Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*. **23.** 145–166. DOI: 10.1207/s15326985ep2302_5

Siegler, R. S., Thompson, C. A. és Schneider, M. (2011): An integrated Theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, **62**. 273–296.

Silver, E. A. (1986): Using conceptual and procedual knowledge: A focus on relationships. In: Hiebert, J. (szerk.): *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 181–198. DOI: 10.4324/9780203063538

Szenes Adolf (1934): *A tanuló tipikus számolási hibái és elhárítási módja*. Szeged

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. és Siegler, R. S. (2015): Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction,* **37.** 5–13. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Vamvakoussi, X. és Vosniadou, S. (2004): Understanding the stucture of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*. **14**. 453–467. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X. és Vosniadou, S. (2010): How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding About Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, **28.** 181–209. DOI: 10.1080/07370001003676603

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. és Verschaffel, L. (2012): Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, **31.** 344–355. DOI: 10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Van Dooren, W., Lehtinen, E. és Verschaffel, L. (2015): Unraveling the gap between natural and rational number. *Learning and Instruction,* **37**. 1–4. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2015.01.001