

## A matematika és a biológia tantárgyak kapcsolata a középiskolában

*A matematikának komoly szerepe van a természettudományok közül legemberközelibbnek, leghumánabbnak mondható biológiában is. Egyrészt a biológián belüli egészségtan esetében például a vérkép elemzésénél van jelentősége a matematikának, ekkor ugyanis kvalifikált, összehasonlítható adatokat értékelnek ki, s így következtetnek a szervezet egészségi állapotára. De a középiskolai biológia tananyagának is szerves része a matematika alkalmazása.*

A természettudományok közül ez a tantárgy a legkedveltebb, egyrészt azért, mert magával az emberrel, a sokak által kedvelt állatokkal, illetve a növényekkel foglalkozik; másrészt azért, mert a „legmegtanulhatóbb”. A magolásos tanulási stílust követő, „csupán” szorgalmas diákok is könnyebben teljesítenek jól belőle. Viszont ezzel párhuzamosan sajnos sokszor háttérbe szorul a biológia reália mivolta. Pedig ugyanolyan természettudományos logikát igénylő, a matematikai jelrendszert használó tantárgy, mint a fizika és a kémia.

Elsősorban a genetika témakörénél fontosak a matematikai ismeretek, ezen belül a kombinatorika. A genetikában a matematika például a valószínűségi értékeknél jelenik meg, ezek pedig a kombinatorikából eredeztethetők. Matematikai logika képében is helyet kap a matematika, ugyanis igazságtáblázat-szerű ábrázolást követünk a domináns-recesszív öröklődésnél.

A biológia egyéb területeiről sem hiányzik azonban a matematika. Hogy csak a legfontosabbakat említsük: A vírusok és a baktériumok szaporodásának, a betegségek kialakulásának értelmezéséhez szükséges az exponenciális függvény ismerete. Hasonlóan fontos a logisztikus görbék értelmezése például a reális szaporodóképesség populációméretet megszabó hatásának tanulmányozásánál, a Gauss-görbék értelmezése a tűrőképességek ábrázolásának és a mennyiségi jellegek öröklődésének elemzésekor, valamint a mennyiségi jellegek változásainak evolúciós irányt szabó lehetőségeinek mérlegelésekor. Számításokat kell végezni növényélettanban a fotoszintézis intenzitása kapcsán, az ember- és állatélettanban pedig szinte minden szervrendszer működésének megismerésekor. Sokféle matematikai tudáselemet alkalmazunk például a szívből időegység alatt kilökött vér mennyiségének kiszámításakor, a kiválasztás szűrési folyamatainak elemzésekor, a légzési hányados megadásakor, az energiahasznosítás meghatározásakor. A biokémiában az energiatároló vegyületek bioszintézise és a tárolt energia mennyisége, az enzimmolekulák anyag- és energiaszükségleteinek megismerése igényel számításokat.

### Domináns-recesszív öröklődésmenet

A gén egy olyan DNS-szakasz a kromoszómában, amely egy tulajdonságot határoz meg (például szemszín, vércsoport, egy enzimhibán alapuló betegség stb.). Az ugyanazért a tulajdonságért felelős gén azonban nem szükségszerűen ugyanolyan jelentéstartalmú, mert például a szemszínért felelős gén hordozhat barna, de hordozhat kék szemszínért

felelős információt is. Az ugyanazért a tulajdonsáért felelős eltérő információtartalmú géneváltatok az allélok. Mivel egy testi sejtben egy anyai és egy apai eredetű kromoszóma is van, az allélok lehetnek egy adott tulajdonságra nézve azonosak (AA), ám eltérőek is (Aa). Két azonos attribútumnál, azaz homozigóta genotípus esetében a két allél megegyezik, egyforma információt hordoz, míg heterozigóta genotípusnál különböző információtartalmúak az allélok. A genotípus a genetika nyelvén az egyetlen tulajdonságra vonatkozó öröklött információ. A genotípus információtartalma azonban nem szükségszerűen jelenik meg az egyed fenotípusában. A fenotípus a megjelenő sajátosságot jelenti (például ha valakinek kék a szeme, de a szülők szemszíne barna volt, akkor a kék szemszínért felelős genetikai információtartalom is benne volt a szülőkből, de rajtuk ez nem látszik, mert rejtve maradt, a genotípusukból viszont kiolvasható). Más néven teljes tulajdonságnak vagy egyetlen tulajdonságnak is nevezhetjük a fenotípust, tehát például kék vagy barna az ember szemének színe egy adott egyedet vizsgálva.

Az öröklődésnek is vannak szabályai, Mendel 3 törvénye, melyek olyanok, mint a matematika (vagy a fizika) törvényei. A törvényeket Gregor Mendel úgy állapította meg, hogy borsókkal végzett kísérleteket, melyek precíz, egzaktul dokumentált munkák voltak, és előfordulási valószínűséget (gyakoriságot) is vizsgált általuk. Egy tulajdonság öröklődésének vizsgálatakor háromféle allélkölcsonhatás vagy öröklődésmentet figyelhet meg: a domináns-recesszív, az intermedier (köztes / nem teljes dominanciájú) és a kodomináns (kettős dominanciájú) öröklődésmentet.

Az első a matematikailag kiemelhető, legérdekesebb allélkölcsonhatást, a domináns-recesszív öröklődésmentet Punnet-táblázat (1. és 2. ábra) segítségével szoktuk elemezni, mely olyan, mint egy matematikai igazságtáblázat. A táblázat két homozigóta domináns egyed keresztezését mutatja.

		Apai ivarsejtek	
		A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>
Anyai ivarsejtek	A <sub>1</sub>	A <sub>1</sub> A <sub>1</sub> p <sup>2</sup>	A <sub>1</sub> A <sub>2</sub> pq
	A <sub>2</sub>	A <sub>2</sub> A <sub>1</sub> pq	A <sub>2</sub> A <sub>2</sub> q <sup>2</sup>

1. ábra. Punnet-táblázat (kép forrása: Péntes, 2011)

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

2. ábra: Két heterozigóta egyed keresztezésével adódó utódok Punnet-táblázata (kép forrása: <http://5mp.eu/web.php?a=tearsofgods&o=jrLL4VaoZl>)

Például a borsó maghéjszíne domináns-recesszív módon öröklődik. Ez esetben a heterozigóta egyedekben az egyik tulajdonság (a sárga) elnyomja a másikat (zöld). Azaz heterozigóta genotípusnál ennél az öröklődésmentetnél csak az egyik allélra, a domináns allélra jellemző tulajdonság jelenik meg, míg az elnyomott recesszív allél által hordozott

információ nem figyelhető meg az első utódnemzedék fenotípusában abban az esetben, ha a szülők homozigóták voltak.

Ebben az öröklésmenetben – ha a szülők nem tiszta származéksorúak – nem tudjuk megmondani, hogy egy domináns tulajdonságot mutató egyedhez milyen genotípus tartozik. Ha ezt meg akarjuk állapítani, ahhoz tesztelő keresztezésre van szükség, amely viszont kizárólag növények és tenyészállatok esetében lehetséges. Az ember néhány domináns-recesszív módon öröklődő tulajdonságát az 1. táblázat mutatja.

1. táblázat. Az ember néhány domináns-recesszív módon öröklődő tulajdonsága (forrás: Oláh, 2004)

Jellemző	Domináns allél	Recesszív allél
Szemszín	barna (sötét)	kék (világos)
Szempilla	hosszú	rövid
Szembrés	nagy	kicsi
Orr	sasorr	görög orr
A nyelv oldala	felpöndöríthető	nem felpöndöríthető
A nyelv hegye	felhajlítható	nem felhajlítható
Hüvelykujj	egyenes	hátrahajló

Az is megjegyzendő, hogy a tulajdonságok megjelenési formájának létrejöttében a környezet is jelentős befolyásoló tényező az öröklöttség mellett a mennyiségi jellegek öröklődése esetén (például a testmagasság az öröklöttnél kisebb lehet rossz táplálkozás vagy kedvezőtlen körülmények miatt).

Nézzünk egy példát az előbbi elméleti ismeretek megértésének, a domináns-recesszív allélkölcsonhatás megismerésének segítésére! Ekkor a matematika a biológiai probléma leíró nyelve lesz. A biológia a matematikusok szemében itt alkalmazott matematikaként jelenik meg, de biológiaórán a matematika csupán eszköz lesz.

Nézzük a következő feladatot!

Tegyük fel, hogy az ember szemszíne kétféle fenotípusú lehet: sötét és világos, azaz barna és kék. Ebben az esetben milyen színű szemű gyermeke lehet 2 barna szemű szülőnek? Milyen színű szemű gyermeke lehet egy barna és egy kék szemű szülőnek? Milyen színű szemű gyermeke lehet 2 kék szemű szülőnek? Minden esetben jellemezzük a genotípust is!

A feladat megoldását szét kell bontani több esetre. A matematikában is használatos esetszétválasztást végzünk. Hogy hány eset van, azt kombinatorikával határozhatjuk meg. Tudjuk, hogy a 2 szülőnek 2–2 allélja van a szemszínre vonatkozóan, amelyek az ivarsejtekbe egyedül kerülnek és a másik szülőtől származó ivarsejtekben lévő alléllal szabadon kombinálódnak (mert egy petesejt egy ivarsejttel fog egyesülni, de az bármelyik lehet!). Ezért ezeket az összes lehetséges módon össze kell párosítanunk úgy, hogy a valószínűségeket is jelöljük. A 2 allél sorrendje nem különböztetendő meg (mint mikor a kombinatorikai feladatokban nem tölcsérbe, hanem kehelybe kérjük a fagyit). Nézzük először az anya szempontjából a lehetőségeket. Nála 3 genotípussal valósulhat meg a két szemszín: BB, Bk, kk (a Barna szemszín nagy betűvel jelölve, mert az a domináns). Mindhárom lehetőség 3 másik lehetőséggel kereszteződhet, hiszen az apa genotípusa is 3 lehet (BB, Bk, kk). Így összesen 9 lehetőség adódik (2. táblázat) az allélkereszteződés eseteire, ha az allélok sorrendjétől eltekintünk. (Ez biológiai szempontból egy leegyszerűsítés, a Punett-táblákban ugyanis – mint fentebb láttuk – a biológiában minden esetben az ivarsejtekben lévő allélek lehetőségeit tüntetik fel!)

2. táblázat. Lehetséges allélkombinációk

Anya alléljai (szemszíne)	Apa alléljai (szemszíne)
BB (barna) x	BB (barna)
	Bk (barna)
	kk (kék)
Bk (barna) x	BB (barna)
	Bk (barna)
	kk (kék)
kk (kék) x	BB (barna)
	Bk (barna)
	kk (kék)

Abban az esetben, ha az anya és az apa alléljait sem különböztetjük meg egymástól, akkor 3 további eset tűnik el (színessel jelölve az azonosakat), és 6 lehetőség adódik.

### Mi történik két barna szemű szülő allélpárjának keresztezésekor?

a) **BB x BB**: 2 barna szemű szülő, mindkét szülő homozigóta (3. táblázat).

3. táblázat. 2 homozigóta barna szemű szülő keresztezése

	barna 1/2	barna 1/2
barna 1/2		
barna 1/2		

Ilyenkor a táblázat tovább egyszerűsíthető (4. táblázat).

4. táblázat. 2 homozigóta barna szemű szülő utódainak szemszíne

	barna 1/1
barna 1/1	B-B <b>homozigóta barna</b> 1/1 = 100% → <b>Megjelenési forma (Fenotípus): 100% barna szemű</b>

b) **Bk x BB**: Első eset: 2 barna szemű szülő, anya heterozigóta (5. táblázat). Az előzőhöz hasonlóan a homozigóta szülő sorát elég egyszer leírni.

5. táblázat. Homozigóta és heterozigóta barna szemű szülők utódjainak szemszíne

	barna 1/2	kék 1/2
barna 1/1	B-B <b>homozigóta barna</b> 1/2 = 50%	B-k <b>heterozigóta barna</b> 1/2 = 50%
Fenotípus: 100% barna szemű		

Második eset: 2 barna szemű szülő, apa heterozigóta (6. táblázat). Ez, bár más megvalósulása az esetnek, ugyanazt jelenti, mint az előző táblázat, 90°-al elforgatva. Biológiai szempontból ez nem ad új lehetőséget, mert teljesen mindegy, hogy az anya vagy az apa heterozigóta-e. De matematikailag erre a lehetőségre, a b) szerinti bk X BB -re viszont nagyobb valószínűség lesz így.

6. táblázat. Homozigóta és heterozigóta barna szemű szülők utódjainak szemszíne 2.

	<i>barna</i> 1/1	
<i>barna</i> 1/2	B-B <b>homozigóta Barna</b> 1/2 = 50%	<b>Fenotípus: 100% Barna szemű</b>
<i>kék</i> 1/2	B-k <b>heterozigóta Barna</b> 1/2 = 50%	

c) **Bk x Bk**: 2 barna szemű szülő, mindkettő heterozigóta (7. táblázat).

7. táblázat. 2 heterozigóta barna szemű szülő utódjainak szemszíne

	<i>barna</i> 1/2	<i>kék</i> 1/2
<i>barna</i> 1/2	B-B <b>homozigóta Barna</b> 1/4 = 25%	B-k <b>heterozigóta Barna</b> 1/4 = 25%
<i>kék</i> 1/2	B-k <b>heterozigóta Barna</b> 1/4 = 25%	k-k <b>homozigóta kék</b> 1/4 = 25%
	Fenotípus: 75% barna szemű, 25% kék szemű	

A feladat első kérdéseire válaszolva: 2 barna szemű szülőnek barna vagy kék szemű gyermeke lehet (még ha utóbbi tényen meg is lepődünk). Ezt a), b) és c) eset szemlélteti. Azt is figyelembe véve, hogy a b) eset kétszeres valószínűségű, a következő mondható el a fenotípusról:

- esetben az összes lehetséges alkalom 1/4-ében, azaz 25 százalékban barna szemű gyermek születik;
- eset szerint az összes lehetőség 2/4-ében, 50 százalékban barna szemű gyermek születik;
- eset nyomán az összes lehetőség 1/4-ének 75 százalékában, azaz 18,75 százalékában ( $0,25 \times 0,75 = 0,1875$ ) szintén barna színű lesz az utód szeme, de a lehetőségek 1/4-ének 25 százalékában, azaz 6,25 százalékában ( $0,25 \times 0,25 = 0,0625$ ) kék lesz a gyermek szemének színe.

Tehát valószínűleg, 93,75 %-ban barna színű lesz az utód szemszíne, de 6,25 %-ban lehet kék szemű is. Matematikailag az eredményünk lehetséges mivolta abból is látszik, hogy a valószínűségi értékek összege 100 százalékot (törtalakban 1-et) ad.

Genotípus a táblázatokból leolvasható:

- homozigóta barna:  $25\% + 2 \times 25\% + 0,25 \times 25\% = 81,25\%$
- heterozigóta barna:  $2 \times 0,25 \times 25\% = 12,5\%$
- homozigóta kék:  $0,25 \times 25\% = 6,25\%$
- összesen a várt 100%.

**Mi történik abban az esetben, ha az egyik szülő barna, a másik pedig kék szemű?**

d) **BB x kk**: 1 barna szemű homozigóta szülő és 1 kék szemű (homozigóta) szülő utódai (8. táblázat). A kék szemű szülő biztosan homozigóta, mert a kék a recesszív allél. Ebből a lehetőségből a b) esethez hasonlóan kétszeres lesz attól függően, hogy az anya vagy az apa kék szemű. Ezek ugyanúgy egyenrangú lehetőségek lennének, melyek viszont ugyanazt jelentik. Tehát a lehetőség kétszeres valószínűségű. A táblázat homozigóta sorai/oszlopai csak egyszer szerepelnek a korábbihoz hasonlóan, így megint csak 2x2-es táblázat lesz.

8. táblázat. Heterozigóta barna és kék szemű szülő utódjainak szemszíne

	<i>barna</i> 1/1
<i>kék</i> 1/1	B-k <b>heterozigóta Barna</b> 1/1 = 100% <b>Fenotípus: 100% barna szemű</b>

e) **Bk x kk**: 1 barna szemű heterozigóta szülő és 1 kék szemű (homozigóta) szülő utódai (9. táblázat). Az előzőhöz hasonlóan a kék szemű szülő biztosan homozigóta, mert a kék a recesszív allél. És ebből a lehetőségből is kétszeres lesz attól függően, hogy az anya vagy az apa kék szemű. Tehát a lehetőség újra kétszeres valószínűségű lesz. A homozigóta szülő miatt megint egyszerűsödik az eredeti 3x3-as igazságtáblázat.

9. táblázat. Homozigóta barna és kék szemű szülő utódjainak szemszíne

	<i>barna</i> 1/2	<i>kék</i> 1/2
<i>kék</i> 1/1	B-k <b>heterozigóta Barna</b> 1/2 = 50%	k-k <b>homozigóta kék</b> 1/2 = 50%
Fenotípus: 50% barna szemű, 50% kék szemű		

A feladat második kérdésére válaszolva: 1 barna és 1 kék szemű szülőnek lehet barna vagy kék szemű gyermeke. Ezt a d-e) eset szemlélteti. Mindkét eset kétszeres valószínűségű, így kezelhetjük 2 egyenrangú lehetséges kimenetelnek. A fenotípus tehát:

- d) esetben az összes lehetséges alkalom 1/2-ében, azaz 50 %-ban barna szemű gyermekek születnek,  
e) eset szerint az összes lehetőség 1/2-ének 50 %-ában, azaz 25 %-ban barna szemű lesz az utód, míg az 1/2-ének szintén 50 %-ában, 25 %-ban kék.

Tehát valószínűbb, hogy barna szemű lesz az utód, de itt a barna-kék arány az előzőnél lényegesen kevésbé eltérő 3:1, összesen 75 %-ban lesz barna szemszín, és 25 %-ban kék. Matematikailag az eredményünk most is lehetséges, hiszen a valószínűségi értékek összege 100 százalékot (törtalakban  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ -et) ad.

Genotípus a táblázatokból leolvasható:

- homozigóta barna: 0%
- heterozigóta barna:  $0,5 \times 100\% + 0,5 \times 50\% = 75\%$
- homozigóta kék:  $0,5 \times 50\% = 25\%$
- összesen a várt 100%.

### Milyen szemszínű utódok várhatók, ha mindkét szülő kék szemű?

f) **kk x kk**: 2 kék szemű (homozigóta) szülő utódai (10. táblázat). Elég 2x2-es táblázatot és eredménysort alkotni.

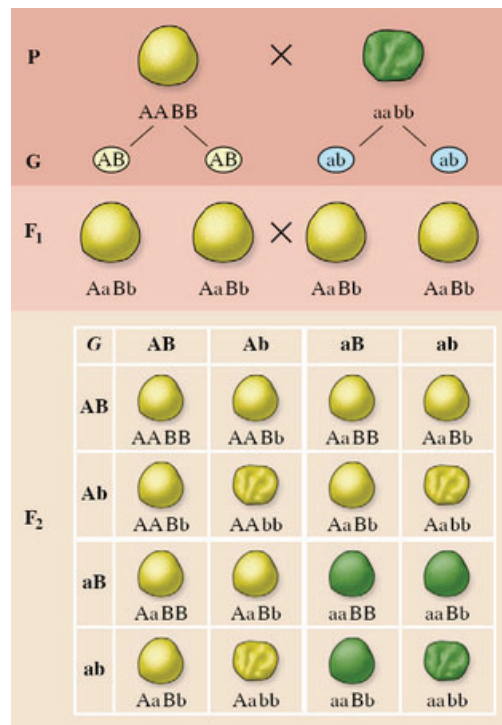
10. táblázat. 2 kék szemű (homozigóta) szülő utódainak szemszíne

	kék 1/1
kék 1/1	k-k <b>homozigóta kék</b> 1/1 = 100% → <b>Megjelenési forma (Fenotípus): 100% kék szemű</b>

A feladat utolsó kérdésére válaszolva: 2 homozigóta recesszív kék szemszínű szülőnek biztosan kék szemű gyermeke lesz. Ez azért érdekes, mert két domináns barna szemszínű szülőnek lehet kék szemű utódja. Azaz a fenotípusról elmondható f) nyomán, hogy 100 százalék valószínűséggel, azaz teljesen biztosan kék színű lesz az utód szemszíne. Genotípus szerint pedig homozigóta kék jellegről beszélünk az utódok esetében is.

Összesítsük a feladatból adódó lehetőségeket a matematika szempontjából is: 6-féle lehetőség van az öröklés menetére, ezek közül 3 kétszeres súllyal számít, azaz olyan, mintha  $6+3 = 9$  lehetőség lenne. Ami konzekvens a feladat elején tett megállapítással.

Léteznek bonyolultabb lehetőségek és Punnet-táblák is, például többgénes öröklődés esetében (3. ábra).



3. ábra: Többgénes öröklődés menet szemléltetése (kép forrása: Biológia 12., é. n.)

A valószínűségi jelleggel is foglalkozhatunk részletesebben a matematika szempontjából. Erre a biológiában szintén ismert törvény létezik. A Hardy–Weinberg-törvény szerint egy ideális populációban az egymást követő nemzedékekben az allélok és a genotípusok gyakorisága állandó, és az utódnemzedékek egyedeiben a véletlenszerű kombináció szerint oszlanak el az allélok. Matematikai alakkkal sokkal könnyebben érthetővé válik a törvény:

Jelölések:

A: egy gén domináns allélja

$p_{(A)}$ : A allél relatív gyakorisága

$p^2$ : homozigóta domináns egyedek relatív gyakorisága az adott populációban

a: egy gén recesszív allélja

$q_{(a)}$ : a allél relatív gyakorisága

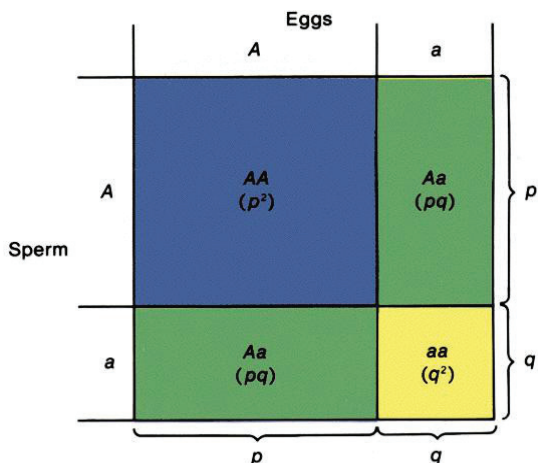
$q^2$ : homozigóta recesszív egyedek relatív gyakorisága az adott populációban

$2pq$ : heterozigóta egyedek relatív gyakorisága az adott populációban

Az ivarsejtekre teljesül, hogy:  $p_{(A)} + q_{(a)} = 1$ .

Míg ideális populáció egyedeire:  $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = 1$ .

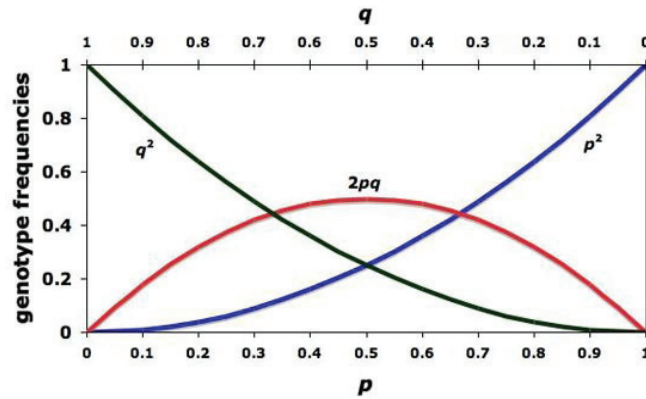
Nemcsak a logikai táblához hasonló Punnet-táblázatban mutatható az allélok gyakorisága, hanem grafikus ábrázolás is lehetséges. Erre utal már a korábbi 2. ábra is. Fel kell venni egy egységoldalú négyzetet, s ebben a megfelelő kis négyzetek kijelölésével utalni a gyakoriságra (4. ábra).



4. ábra. A Hardy–Weinberg-törvény szemléltetése (a kép forrása: Ussery, 1997)

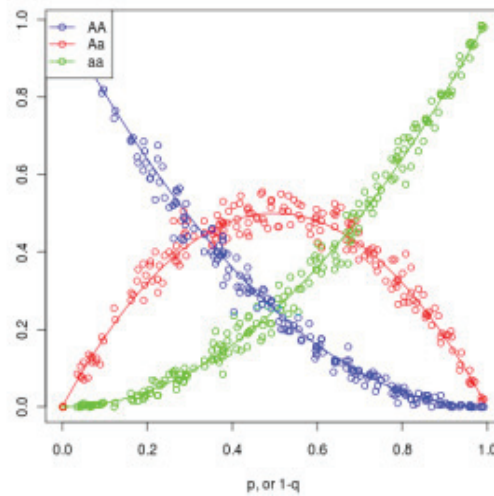
Másként, bonyolultabban is ábrázolható a törvény (5. ábra). Itt két fél parabola látható a grafikonon. Természetesen a téglalap-területes ábra is változik a függvényhez hasonlóan. Ez a téma alkalmas a biológiához szükséges matematikai ismeretek kiemelésére, míg matematikában életszerű példán keresztül foglalkozhatunk a függvénnyel és materiálisabb vonatkoztatást adhatunk a témának (a biológiával és a területes szemléltetéssel is).





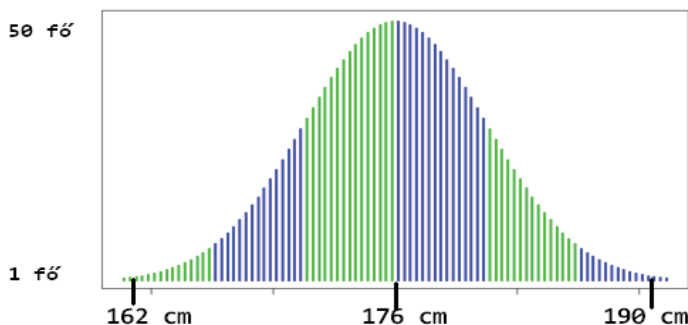
5. ábra. A Hardy–Weinberg-törvény bonyolultabb szemléltetése (a kép forrása: Andrews, 2010)

Utóbbi szimulációval is bemutatható (6. ábra).



6. ábra. A Hardy–Weinberg-törvény szimulációjának képe (a kép forrása: Chivers, 2011)

A mennyiségi jellegek öröklésének elemzésében a matematikai statisztika kap szerepet. Egy adott mennyiségi jellegért mindig több – néha sok – gén a felelős, amelyek külön-külön, domináns-recesszív módon fejtik ki hatásukat. A sokféle génnek sokféle allélja is van, ami tovább növeli a kombinációk lehetőségét. Ez a vizsgált tulajdonságra nézve sokféle genotípust és fenotípust eredményez (például kukorica csőhossza, paradicsom bogyómérete stb.). Ha a genotípus-kategóriák közti különbségek kicsik, akkor a fenotípusokban az eltérések nem is jelentkeznek élesen, a fenotípusok összemosódnak. Nem figyelhetők meg jól meghatározható öröklődő kategóriák egy populációban, hanem folytonos az eloszlás. Ennek kialakításában a környezet is befolyással lehet. Ilyen pl. a népesség magassága, mely haranggörbe szerint, azaz normális eloszlást követve változik (7. ábra). A normális eloszlás szerint kétegénis tulajdonság esetében a kategóriák aránya itt csak 1:4:6:4:1, háromegénis esetben 1:6:15:20:15:6:1, négygénis esetben 1:8:25:56:28:8:1.



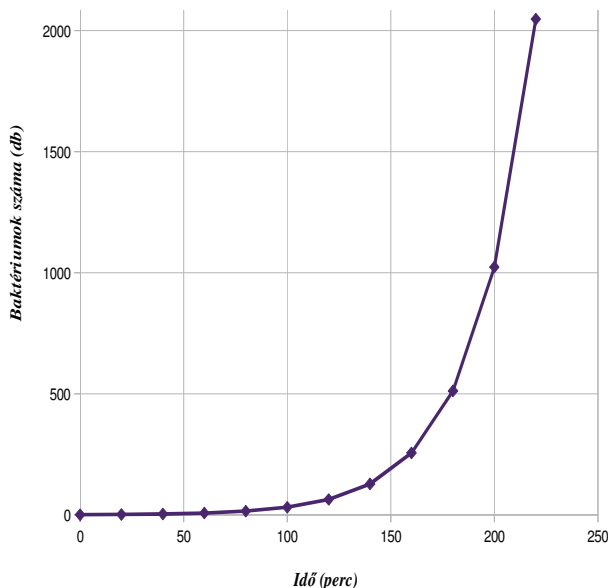
7. ábra. A magasság normális eloszlása (a kép forrása: Antalffy, 2012)

A koordináta-rendszerben ekkor az abszcissza a mennyiségi jelleg mértékét mutatja, míg az ordináta a mennyiségi jelleget mutató egyedek számára utal (illetőleg ezek népességbeli arányára is utalhat; vagy annak valószínűségi kifejezője, hogy a születendő egyed a mennyiségi jelleg adott értékét eléri). A vizsgált tulajdonságoktól függően a haranggörbe maximumpontja el is tolódhat a grafikonon.

*A mennyiségi jellegek öröklődésének elemzésében a matematikai statisztika kap szerepet. Egy adott mennyiségi jellegért mindig több – néha sok – gén a felelős, amelyek külön-külön, domináns-recesszív módon fejtik ki hatásukat. A sokféle génnek sokféle allélja is van, ami tovább növeli a kombinációk lehetőségét. Ez a vizsgált tulajdonságra nézve sokféle genotípust és fenotípust eredményez (például kukorica csőhossza, paradicsom bogyómérete stb.). Ha a genotípus-kategóriák közti különbségek kicsik, akkor a fenotípusokban az eltérések nem is jelentkeznek élesen, a fenotípusok összemosódnak.*

#### A baktériumok szaporodása

A baktériumok hasadással szaporodnak, többségük mintegy 20 percnként ivartalanul kettéosztódik (8. ábra). Azaz minden meglévő baktérium minden 20 perc után megkettőződik, ami matematikailag  $2^t$  baktériumszám-idő exponenciális függvénnyel jellemezhető, ahol  $t$  az idő. És tudjuk, hogy csak a 20 perces időközöket kell vizsgálni, mert azok között a függvény nem változik, ezért választottuk egységnek a 20 percet. Ez a példa is mutatja, hogy a biológiában a függvényelemzés is helyet kap, és szükséges a tantárgy eredményes tanulásához. A matematika szempontjából pedig a példa jól megfogható jelentést ad az absztraktabb exponenciális függvényeknek.



8. ábra. Baktériumok számának változása a szaporodásuk folyamán az idő függvényében

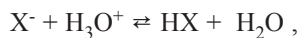
### Biokémiai egyenletrendezések

A biokémia témakörében is vannak a kémiához hasonlóan kémiai jellegű egyenletrendezések, hiszen az élő szervezetben is kémiai reakciók zajlanak le. Ezek a matematika szempontjából kiemelendők, ugyanis valójában ezek is algebrai egyenletrendezések, csak itt nem különböző változók vannak, hanem helyettük az egyes kémiai elemeket jelölő vegyjelek együttíthatóknak kell megegyeznie az egyenlet két oldalán (ez hol alsó indexben szerepel, hol a vegyjel előtt, attól függően, hogy milyen új vegyület keletkezik a folyamatban). Azzal is alátámasztható az a tény, hogy a (bio)kémiai egyenletrendezés igazából tiszta matematika, hogy a felsőoktatási tanulmányok során azon hallgatóknak, akik erősek matematikából, illetőleg matematika vagy fizika a másik szakjuk, lényegesen sikeresebben szokott menni a kémiai számolási gyakorlat, valamint a biológia és kémia laboratóriumok ilyen jellegű feladatai.

A következőkben röviden ismertetünk néhány biokémiai egyenletrendezéshez tartozó példát.

Léteznek pufferrendszerek (angol buffer szó = lökhárító; ebből puffer = háritó, hatás-csökkentő, kiegyenlítő anyag; pufferoldat = állandó pH-t biztosító oldat), ezeknek köszönhető, hogy egzaktul szabályozott konstans kémhatása van a sejteknek. A pufferrendszerek működését elsősorban a légzés és a vese teszi lehetővé. A legfontosabb pufferek az élőlényeknél a foszfátpufferek, valamint a fehérjék aminos- és karboxil- csoportjainak pufferei. Utóbbiaknak a vérben van jelentősége.

A pufferek kettő vagy több hidrogénion- ( $H^+$ ) felvétellel vagy -leadással egymásba alakulni képes molekulából vagy ionból állnak. Ez egyenlet alakban:



ahol a pufferrendszer  $X^-$  és  $HX$  részecske.

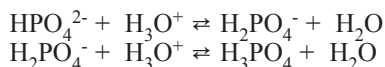
Ha a pufferrendszerhez lúgot vagy savat adunk, akkor a kémiából ismert Le Chatelier–Braun-elv érvényes:

- ez alapján lúg hozzáadásakor a hidroxidionok koncentrációját csökkentő, az oxónium ionok koncentrációját növelő folyamat irányába tolódik el a *puffer rendszer egyensúlya*,
- míg sav hozzáadása esetében a *puffer rendszer egyensúlya* az oxónium ionok mennyiségét csökkentő irányba tolódik.

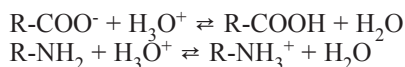
Tehát a pufferrendszer létének köszönhetően a pH-t megváltoztató hatás (a lúg vagy sav hozzáadása miatt létrejövő oxóniumion- és ezzel konzekvensen hidroxidion-koncentráció-változás) kevésbé érvényesül, azaz kevésbé borul fel a pH-egyensúly (a kémhatás).

Az előző alapján a legfontosabb pufferek biokémiai egyenletei:

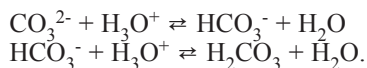
- foszfátpuffer:



- aminosavak pufferei:



- -szénsavpuffer:

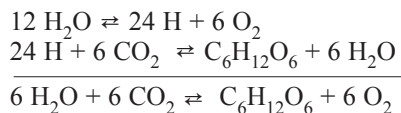


Az élet szükséges feltétele az élőlények szervezetének egyik fontos alkotórésze, a korábbi egyenletrendszerekben is előforduló víz. Százalékos arányadatokat említve a száraz magvaknak 10 százaléká, az emberek tömegének körülbelül 60 százaléká, a medúzák testtömegének 98 százaléká víz.

Azért nagyon fontos a biokémiai folyamatokban ez a Földön leggyakrabban előforduló szervesetlen vegyület, mert ez a jó oldószer, nagy felületi feszültségű, nagy hőkapacitású és kis viszkozitású szerkezeti anyag a reakcióközeg.

Tudjuk, hogy folyadékfázisban mennek végbe az anyagcsere-reakciók. Ezek szintén matematikailag rendezhető egyenletekkel írhatók le legegyszerűbben, legegyszerűbben.

A fotoszintézis és a légzés jelentős biokémiai folyamatok, melyek közül egyik esetben a víz kiindulási anyaga, másik esetben végterméke a kémiai reakciónak (fotoszintézis-kor – az egyenletben balról jobbra haladva – felhasználódik, légzéskor – az egyenletben jobbról balra haladva – termelődik). Tehát az előbb említett szervesetlen vegyület tud kiindulási anyaga és végterméke is lenni a folyamatoknak (egyébként nemcsak szervesetlen vegyületek képesek ilyenre). Ez matematikai alakban:



A fentiek szerint cikkben rámutattam a matematika és a biológia kapcsolatára, mely sokszor háttérbe szorul, pedig nagyon fontos lenne tudatosítása a diákokban és a tanárkollégákban.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Dr. Szerényi Gábor középiskolai biológiatanárnak a cikk megírásában nyújtott szakmai segítségéért.

## Irodalomjegyzék

- Andrews, Ch. A. (2010): *The Hardy-Weinberg Principle*. Nature Education Knowledge. Biological Sciences Collegiate Division, University of Chicago. 2013. 08. 30-i megtekintés, <http://www.nature.com/scitable/knowledge/library/the-hardy-weinberg-principle-13235724>
- Antalfy Tibor (2012): *Gondolataim az IQ-ról*. 2013. 08. 30-i megtekintés, <http://www.antalfy-tibor.hu/?p=5708>
- Chivers, C. (2011): *Using simulation to demonstrate theory: Hardy-Weinberg Equilibrium*. 2013. 08. 30-i megtekintés, <http://bayesianbiologist.com/2011/06/13/using-simulation-to-demonstrate-theory-hardy-weinberg-equilibrium/>
- Biológia 12.* (é. n.) MOZAIK Webtankönyv. Mozaik Kiadó, Budapest. 2013. 08. 30-i megtekintés, [http://www.mozaweb.hu/Lecke-Biologia-Biologia\\_12-Tobbgenes\\_oroklodes-102645](http://www.mozaweb.hu/Lecke-Biologia-Biologia_12-Tobbgenes_oroklodes-102645)
- Oláh Zsuzsa (2003): *Biológia 11.* Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest.
- Oláh Zsuzsa (2004a): *Biológia 10.* Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest.
- Oláh Zsuzsa (2004b): *Biológia 12.* Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest.
- Pénzes Zsolt (2011): *Populációgenetika*. Szegedi Tudományegyetem, Szeged. 2013. 08. 30-i megtekintés, <http://expbio.bio.u-szeged.hu/ecology/evolucio/popgen/book.html>
- Tears of Gods* (é. n.) Honlap. 2013. 08. 30-i megtekintés, <http://5mp.eu/web.php?a=tearsofgods&o=jrLL4VaoZl>
- Ussery, D. W. (1997): *Population Genetics*. Center For Biological Sequence Analysis, Technical University of Denmark DTU. 2013. 08. 30-i megtekintés, <http://www.cbs.dtu.dk/staff/dave/roanoke/genetics60.html>

**Nagy Mária**

egyetemi hallgató, fizika major –  
matematika minor szak