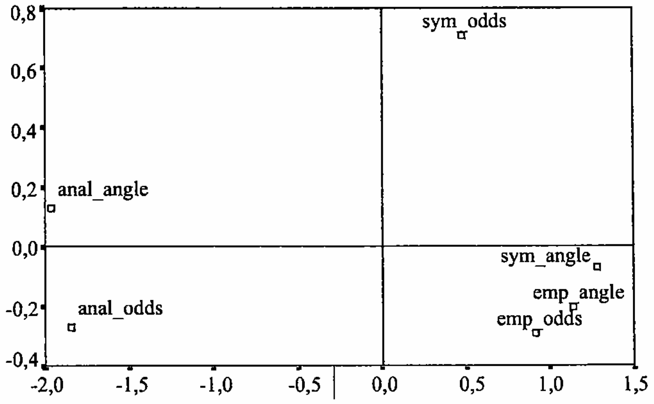


1. ábra. Három bizonyítástípus euklideszi távolságmodellje a többdimenziós skálázás alapján (stress=0.01) [anal=analitikus, emp=empirikus, sym=szimbolikus, odds='páratlan', angle='háromszög']

leménykülönbségek struktúrájára épülő többdimenziós skálázás szerint is hasonló. A második észrevétel azért is érdekes, mert az egyik empirikus bizonyítás a naiv empiricizmus, míg a másik a döntő kísérlet Balacheff-i típusát képviselte.

A többdimenziós skálázással nyert euklideszi távolságmodellel lehetővé válik, hogy azonosítsuk a tanári értékítélet mélyén fellelhető tényezőket. Ehhez az szükséges, hogy a kapott ábrán a tengelyeknek (dimenzióknak) megfelelő interpretációt adjunk. Az első dimenzió (a vízszintes tengely) a leíró statisztikai táblázatban tapasztalt átlagértékek fordított skálájának tekinthető. A második dimenzió (a függőleges tengely) a bizonyítások formalizáltságaként értelmezhető. A leginkább formalizáltnak a „páratlan tétel" szimbolikus bizonyítása tekinthető, ugyanakkor az ehhez az állításhoz tartozó empirikus és analitikus bizonyítások nem tartalmaznak absztrakt matematikai jeleket. A többdimenziós skálázás tehát felszínre hozott a leíró statisztikával is kimutatható értékességi viszonyulás mellett egy másik tényezőt, amely a bizonyítások megítélését befolyásolja: a formalizáltság mértékét.

Amint azt matematikai tévképzetekkel kapcsolatban *Zaslavsky* (1989) kimutatta, a tanulók hibás fogalmai visszavezethetők tanáraikéra, így nagy valószínűséggel a bizonyítások megítélésével kapcsolatos tanulói értékítéletet döntően meghatározza a matematikatanáré. Egy kismintás mérésben empirikus adatokkal támasztottuk alá azt a plauzibilis feltételezést (*Csíkos*, 2000), hogy amikor tanulók bizonyításokat értékelnek, lényegében ugyanazt a pontszámot adják, mint amit szerintük a tanáruk adna. Ugyancsak kimutattuk, hogy az iskolai évek alatt változás következik be a tanulói bizonyítás-megítélésben. Például míg 7. osztályban ötfokú skálán a tekintélyelvű érvelésre adott átlag 1,96 és 2,82 között változik – a bizonyítandó állítás tartalmától függően, addig a 11. évfolyamos gimnazisták átlaga mindegyik esetben 1,6 alatti.

Vizsgálatunkkal közelebb juthatunk annak a hatásrendszernek a megismeréséhez, amely a tanulók szemében a bizonyítások értékességét meghatározza;

– feltételezhetjük, hogy a bizonyításokkal kapcsolatos gondolkodási folyamatok evolúciós hasonlattal írhatók le; a hatékonynak tartott sémák megerősítést nyernek, míg más sémák háttérbe szorulnak;

– nyilvánvaló, hogy amennyiben választási lehetőségünk van több séma között, akkor valamilyen értékelési folyamatnak kell lejátszódnia a gondolkodásban;

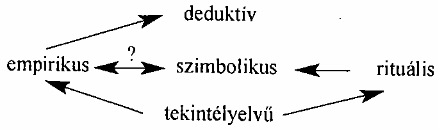
– kimutatható, hogy a tanulók lényegében úgy ítélik meg a bizonyítási sémákat, mint ahogyan véleményük szerint matematikatanáruk azokat megítéli;

– az iskolai évek alatt a bizonyítások tanulói megítélése változik, és egyre inkább a tanárokéhoz hasonlóvá válik.

Eszerint a négylépcsős elméleti következtetési lánc szerint a tanulók bizonyításokkal kapcsolatos gondolkodási folyamatait nagymértékben befolyásolja matematikatanáruk bizonyításokkal kapcsolatos értékítélete. Két dolgot ezzel kapcsolatban itt kiemelünk: az empirikus bizonyítások alulértékeltek, és a bizonyítások formalizáltságának mértéke olyan faktornak tűnik, amely befolyásolja a bizonyítások megítélését.

Bizonyítástípusok fejlődési modellje

Harel és Sowder modellje, amely a bizonyítások kategorizálásában egyszerre figyelembe veszi a matematika és a pszichológia szempontjait, kutatásaink alapján a fejlődés aspektusával egészíthető ki. Figyelembe véve azt, hogy matematikatanáraink megítélése szerint a szimbolikus bizonyítások relatíve alul-, míg az empirikus bizonyítások relatíve fölülértékeltek, a következő fejlődési bizonyítás-kategorizálási modellt javasoljuk:



2. ábra

Az ábrával kifejezett összefüggések közül hármat emelünk ki:

– érvelésünk kisgyermekkorban először leggyakrabban a tekintélyelvű, majd egyre többször megjelennek empirikus és rituális elemek;

– az iskolába lépéssel felértékelődnek a szimbolikus bizonyítások;

– a deduktív bizonyításokhoz az empirikus bizonyításokon keresztül vezet az út.

Az empirikus és szimbolikus bizonyítások közötti kérdőjel a közöttük lévő viszonyra utal: valószínű, hogy a szimbolikus bizonyítások egy fejlődési zsákutcát jelentenek, a kérdőjel pedig egyben figyelmeztető a pedagógia számára, és azt jelzi, hogy az empirikus bizonyításokon keresztül van visszatérés a fejlődés útján. Az empirikus bizonyítások fontosságának elismerése szemléletbeli változást követel. Talán kulturális örökségünk része egy olyan matematikatanítás, amely az iskolai szigorúság letéteményese és ugyanakkor a korai formalizmus táptalaja. Figyelemre méltó, hogy azok a tanulók, akik (nyílt végű kérdésfeltevés esetén) szimbolikus bizonyítást adtak, magas szintű matematikai tanulmányi éntudattal rendelkeznek. (*Józsa és Csíkos*, 1999) Gyakorlati következtetéseink között kell szerepelnie annak, hogy hangsúlyozzuk a bizonyítás előtti „terület-felderítés" (*Edwards*, 1997) fontosságát.

Ha arra a kérdésre kell felelnem, hogy vajon egy gyakorló matematikatanár számára mit mondanak ezek a kutatási eredmények, a legfontosabbnak azt tartom, hogy a tanulók empirikus bizonyításait tekintsük a valódi matematikai bizonyításokhoz vezető út fontos állomásának, és értékeljük ennek megfelelően.

Irodalom

Balacheff, N.: (1988): Aspects of proof in pupils practice of school mathematics. In: Pimm, D. (ed.): *Mathematics, teachers, and children.* Hodder and Stoughton, London. 216–235.

Csíkos Csaba (1999a): Iskolai matematikai bizonyítások és a bizonyítási képesség. *Magyar Pedagógia*, 1. 3–21.

Csíkos, C. A.: (1999b): Measuring students proving ability by means of Harel and Sowder's proof-categorization. In: Zaslavsky, O. (ed.): *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol 2, Technion, Haifa, Israel, 233–240.

Csíkos, Csaba (2000): *A bizonyítási képesség értelmezése és fejlődésének jellemzői iskoláskorban.* PhD értekezés, Szegedi Tudományegyetem, Pedagógia Tanszék.

Csíkos Csaba (2001): Bizonyítási stratégiák megítélése 12–17 éves korban. *Magyar Pedagógia*, 8. 319–345.

Edwards, L. E. (1997): Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computer for Mathematical Learning* 2. 3. 187–215.

Fuson, K. C. (1992): Elementary mathematics education. In: Alkin, M. C. – Linden, M. – Noel, J. – Ray, K. (eds.): *Encyclopedia of Educational Research.* 6th ed., McMillan Publishing Company, New York. 776–786.

Hanna, G. (1995): Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics* 15. 42–49.

Harel, G. – Sowder, L. (1998): Students proof schemes: Research from exploratory studies. In: Dubinsky, E. – Schoenfeld, A. – Kaput, J. (eds.): *Research Issues in Collegiate Mathematics Education.* Vol. 7. American Mathematical Society, 234–283.

Hodgson, T. – Morandi, P. (1996): Exploration, explanation, formalization: A three-step approach to proof. *Primus*, 6. 49–57.

Hoyles, C. (1997): The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics*, 17. 7–16.

Józsa, K. – Csíkos, Cs. (1999): *The relationships between mathematics self-concept and cognitive abilities required for mathematics achievement.* Paper presented at the 8th European Conference for Research on Learning and Instruction, Gothenburg, Sweden. 24–28, August.

Piatelli-Palmarini, M. (1989): Evolution, selection, and cognition: From learning to parameter setting in biology and the study of language. *Cognition*, 31. 1–44.

Thompson, D. R. – Senk, S. L. (1993): Assessing reasoning and proof in high school. In: Assessment in the mathematics classroom. *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, 167–176.

Wilder, R. L. (1944): The nature of mathematical proof. *American Mathematical Monthly*, 51, 309–323.

Zaslavsky, O. (1989): *The development of a concept: A trace from the teacher's knowledge to a student's knowledge.* Paper presented at the Annual Meeting of the AERA, San Francisco, CA.

A kutatást az OTKA támogatta (OTKA T 22441).

Csíkos Csaba

Matematikatanításunk, nemzetközi mércével

Iskolai matematikatanításunk helyzetének, a tanulók tudásszintjének reális megítéléséhez először is a teljes iskolai populáció átlagteljesítményét kell vizsgálnunk, életkor és iskolatípus szerint. Ez egyaránt értendő alapkészségekre, valamint komplex vagy fejlettebb képességekre. Ezt a képet egészíti ki és árnyalja a kiemelkedő tanulók képességeinek szintje, fejlődése, illetve a matematikai tehetségek eredményessége (matematikai versenyek, szaktárgyi olimpiák). Ezt követően természetesen fontos szempont a településtípusok közötti eltérések vizsgálata, akárcsak a hátrányos helyzetű vagy tanulási nehézségekkel küszködő, illetve a fogyatékos tanulók képességszintjének az elemzése is.

A hazai mérések adatai által mutatott „abszolút" változásokat érdemes összevetni nemzetközi összehasonlító mérések szerinti pozíciónk „relatív" változásaival, azaz „átlagos versenyképességünk" alakulásával.

Egy valós helyzetértékelésben olyan „környezeti" tényezők hatásával is számolnunk kell, mint a tantervi változások – tágabban a társadalmi igények változása –, a tanítási-tanulási koncepciók változása, illetve a jelenlegi gyakorlatban domináns irányzatok, a tankönyvek és más taneszközök, technikai eszközök változása, vagy a matematikatanár-képzés és továbbképzés változása és helyzete. E tekintetben is hasznos lehet az összevetés a nemzetközi változatossággal és trendekkel. Egy ilyen komplex helyzetelemzéshez kívánok ezúttal néhány adalékkal hozzájárulni.

Hazai monitor mérések

Megállapíthatjuk, hogy 1986-tól 1997-ig a matematika tudásszint minden mért korosztályban süllyedt, ami további színvonalesést jelent 1986 előtti mérési szintekhez képest. A nagyon fontos alsó tagozatos iskolaszakasz tekintetében kiemeljük, hogy 1986-ról 1995-re a 4. osztályosok teljesítménye nem változott, habár 1991-ig tartó fejlődés után esett vissza. A

10. osztályra jellemző példa 1995-ben, hogy bár kétharmaduk fel tudta ismerni és érti a lineáris kapcsolatot, többségük nem tudta felírni a megfelelő lineáris függvényt. Több mint kétharmaduk nem tudott megoldani egy egyszerű százalékszámítási feladatot. *(1)* Napjainkra ez az általános színvonalesés mérséklődött (talán megállt). Meg kell jegyeznünk viszont, hogy a kerettantervi további óraszámcsökkentés (4. és 6. osztályban heti 3 órára) várható negatív hatása még csak ezután jelentkezhet.

A rendszeressé vált monitor mérések folytán remélhetőleg mihamarabb megoldható lesz, hogy az iskolatípusonkénti és korcsoportonkénti országos átlagteljesítmény minden tanárhoz eljusson. Témakörönként, alapkészségeket mérő, illetve az összetettebb vagy fejlettebb képességeket mérő minta-kérdésekre gondolok, a valóságos monitortesztek (szűkített?) verzióira a valóságos átlagértékekkel. Ez jelenthetne a tanár számára olyan objektív skálát, „kapaszkodót", amellyel mérni tudná osztályai, tanulói fejlődését attól kezdve, hogy hozzá kerültek, addig, míg elbocsátja azokat. Többek között ettől lehetne remélni a színvonal újbóli emelkedését.

Nemzetközi szinten veszítettünk régebbi erős pozíciónkból, de még a mezőny első harmadának végén vagyunk. Az iskolázás első szakaszában még erősek vagyunk. Ezek a megállapítások a teljes populációra vonatkoznak, hiszen a matematikai olimpiákon egyenletesen az élvonalban teljesítenek a magyar diákok.

Helyzetünk a nemzetközi mezőnyben

Az eddigi legnagyobb szabású nemzetközi mérést az 1995-ös IEA-TIMSS mérés valósította meg matematikából, 45 ország közel 15 ezer iskolájának félmillió tanulójával. Eszerint a 13–14 éveseknél a magyar tanulók 41 ország között a 14. helyen végeztek (8. európaiként). *(2)* Ez relatív visszaesést jelent az 1991-es IAEP méréshez képest, amikor is – igaz, csak 20 ország között – Svájccal együtt Magyarország volt Európában a legerősebb, miközben csak Dél-Korea és Tajvan végzett előttünk. *(3)* A tesztkérdések csaknem kétharmada hozzáférhető a nemzetközi átlagokkal együtt. Hasznos lenne ezeket a magyar minta átlagaival együtt itthon is publikálni.

Két szűkebb körű, de hosszabb távú nemzetközi mérésről is említést teszek

A Kassel-Exeter nemzetközi projekt keretében 1993 és 1996 között 13–16 éves tanulók (nálunk 14–16 évesek, pontosabban 9–10. osztályosok) fejlődését vizsgáltuk matematikából. Bár elsősorban az egyes országokon belüli fejlődés vizsgálatát céloztuk, és így a részt vevő 20 ország adataival csak részben rendelkezünk, azért megállapítható, hogy (gyengülésünk dacára is) még mindig több ország számára pozitív mintát jelent matematikatanításunk. A projekt angol vezetőjének cikkei, magyarországi órafelvételeinek alkalmazása kinti továbbképzések során, továbbá koncepciónk érvényesítése egy kinti matematikatanítási kísérletükben egyaránt ezt igazolják. *(4)* 14+ éves korukban 8 ország között Szingapúr mögött a másodikak voltunk. Lengyel, német, angol, skót, finn és norvég eredménnyel tudtuk még eredményünket összevetni. Rá egy évre a lengyelekkel helyet cserélve a harmadik helyen végeztünk, csekély hátránnyal. *(5)*

A projektet a Kasseli Egyetem Matematika Tanszéke (*Werner Blum* professzor vezetésével) és az Exeteri Egyetemen működő Matematikatanítási Innovációs Központ (CIMT, *David Burghes* professzor vezetésével) indította.

Az International Project in Mathematics Attainment (IPMA) nevű projekt keretében 1998-tól 2004-ig 5–11 éves tanulók (nálunk 6–11 évesek, pontosabban 1–5. osztályosok) fejlődését vizsgáljuk longitudinális méréssel. *(6)* Kevés még az adatunk, de eddig viszonylag jól állunk. Az eltérő iskolakezdési életkor, illetve az óvodai előkészítő szakasz különbségei miatt csak nagyon korlátozott összehasonlítá-