

kahelyet, ahol a jelentkezéskor ne kérdeznének rá az idegen nyelvek ismeretére, a számítógép-kezelés gyakorlati szintjére. Van, ahol csak kérdezik ezt, van, ahol előírják, de mindenképpen előnyt jelent, ha valaki az ilyen jellegű tudásról képesítéssel rendelkezik, ha a tudás dokumentált. A Pedagógus Továbbképzés keretében német nemzetiségi programokban részt vett óvónők által elmondottak és egyéb telefonos megkeresések, szóbeli jelzések arra engednek következtetni, hogy rendkívül nagy a szülők körében az érdeklődés a kisgyermekkorban, óvodáskorban esetenként induló idegen nyelvi óvodai nevelési programot hirdető gyermekcsoportok iránt. A legtöbb ilyen lehetőség a nemzetiségi, kétnyelvű óvodai csoportokban adott, hiszen itt valóban szakképzett óvónők állnak rendelkezésre. Ugyanakkor ketté kell választani az életkori sajátosságok alapján a nemzetiségi óvodapedagógusokat. Az idősebb kollégák egyik része ma még a II. alapképzésben megszerezhető nemzetiségi óvodapedagógus diplomával, azon belül a megfelelő (felsőfokú) idegen nyelvi szint elérésével küszködik, másik részük az „Álamilag elismert középfokú nyelvvizsga C” fokozatának megszerzése érdekében igyekszik a követelményeket a közelgő kormányrendelet által megszabott határidőn belül teljesíteni.

Az informatika terén szerzett jártasságot általában az utóbbi években végzett gyakorló óvodapedagógusok tudják felmutatni. Ennek oka, hogy ők már a középiskolában és a felsőoktatásban egyaránt részesülhettek ilyen irányú oktatásban. Az óvodák számítógéppel való ellátása egyes képet mutat, meglétük nem feltétlenül jellemző. Várhatólag azonban a nyilvánartások, statisztikák, jelentkezések egységesítése, az adminisztráció egyszerűsítése szándékával az önkormányzati óvodák is bekapcsolódhatnak idővel egy rendszerbe, melynek működtetése az önkormányzatok pénztárcájától is függ. Azon tapasztaltabb, sokéves szakmai gyakorlattal rendelkező óvodapedagógusok, akik szintén rendelkeznek számítógépes ismeretekkel, általában ezt vagy hazulról hoz-

ták, vagy Pedagógus Továbbképzések keretében sajátíthatták el.

Az eljövendő évtizedek óvodája már igényelheti a megfelelő számítógépes ismeretet, amelynek éppen az idegen nyelvi gyermekcsoportok iránti fokozott érdeklődés miatt érdemes legalább egy középfokú vagy nemzetiségi óvodákban egy felsőfokú nyelvismerettel is párosulnia. Mint napjainkban már egyre többször tapasztalható, mind nagyobb szerepet kap a végzettségek dokumentált megszerzése a karrierépítésnél. Ugyanakkor az óvodákban kiemelt figyelmet kell fordítani a gyermekközpontúságra, a szakmai gyakorlatra, a pedagógiai feladatokra.

Szólni érdemes arról is, milyen szerepet kell tulajdonítani az óvodapedagógus szakon belüli szaknyelvi speciális ismereteknek (például az Internet adta lehetőségek kihasználásával összhangban.) A nemzetiségi óvodapedagógusok szakszókincse értelemszerűen a képzés folyamatában alakul ki, tehát előnyben vannak az óvodapedagógus szakon tanuló hallgatókkal szemben, akik számára az előírt nyelvi szint csak az alapfokú nyelvvizsga, amely ma már szinte mindenhol szóbeli és írásbeli részből áll. Mindkét hallgatói csoport érdekelt azonban az óvodapedagógiához tartozó német, angol szakirodalom ismeretében. Ennek fokozott jelentőséget ad az is, hogy közeledünk az EU-csatlakozás időpontjához, amikor a szakmai átjárhatóság új lehetőségei nyílnak meg. Köztudott, hogy az óvodapedagógus képzés nálunk felsőoktatási szinten folyik, ami gyakorlatilag egyedülálló az EU-tagországok között is. Ez egyben azt is jelentheti, hogy a Magyarországon kiválóan képzett óvónők iránti kereslet megnőhet külföldön, feltéve, ha a megfelelő idegen nyelvi szint és az informatikai ismeret is adott. A szaknyelvi oktatásnak akkor lesz kiemelkedőbb szerepe az óvodapedagógusok képzésében, ha az a jelenlegi alapfokú nyelvvizsga követelményszintjéről elmozdul – a szociálpedagógus képzéshez hasonlóan – a középfokú nyelvtudás felé.

A kreditrendszer kialakításával megvalósuló és támogatott intézményen belüli

átjárhatóság egyik kérdése, hogy tanulhat-e középfokú szinten például egy szociálpedagógus csoportban óvodapedagógus hallgató, ha neki a képesítési követelményben csak alapfokú nyelvvizsga van előírva. Ha ez megoldható, a tehetséggondozás jegyében ez is támogatandó célkitűzés. Mindez megint felhívja a figyelmet arra, hogy a minőségi idegen nyelv-tanulásra az igény egyre erősebb lesz, és ha ez így van, jelentős szerepet játszhat az is, milyen szinten tudja az intézmény saját számítógépes eszköztárával, idegen nyelvi CD-k elérhetőségével ezeket a szolgáltatásokat nyújtani, a törekvéseket támogatni.

Ki kell témi arra is, hogy várhatóan milyen irányt vesz a következő években a nyelvoktatás a piaci kereslet felől. Mi lesz a fontosabb, az írásbeliség vagy a kommunikatív szerep? Erre a kérdésre ismét az Internet teremtette, új kommunikatív irány, az e-mail küldésének lehetősége adja meg a választ. Ez a lehetőség, bár közlendőnkét írásba tesszük, mégis a közvetlen kommunikáció értékével bírhat, hiszen „előben” lehet beszélgetést, vitát stb. folytatni a világhálón. Az óvodapedagógus szakot alapul véve, természetes, hogy a kommunikációs készséget kell erősíteni, de annak – ha óvodai gyermekcsoportban való idegen nyelvű foglalkozásról van szó – párosulnia kell a jó kiejtéssel, a biztos nyelvtani, nyelvhelyességi tudással. Ha a piac szemszögéből követjük a fejleményeket, akkor is meg kell állapítanunk, hogy a jó kommunikatív tudás a gyakorlatban és a karrierépítésben is előnyt élvez.

Az idegen nyelvet oktató kollégáknak egyik fontos feladata lesz, hogy – az igényes kommunikatív, szakmai nyelvismeret megszerzésének segítése szándékával – az egyéni hallgatói munkaidőben felkészüléshez szükséges módszertant is átadják a hallgatóknak.

A fenti tények feltételezik, sőt igénylik néhány nyelvpedagógiai, oktatástechnológiai vagy oktatástechnikai lehetőség újr gondolását. A tények bizonyítják a nyelvés és a számítógépes ismeretek mint konvertálható szakismeretek fontosságát.

Egyre nagyobb jelentőséget kell tulajdonítani az audiovizuális technikai megoldásoknak és – mint a fentiekből kiderül – a sokirányú számítástechnikai ismereteknek.

Érthető módon nem várható, hogy a jelenlegi idegen nyelvi óraszámok, féléves kontaktóra időkeretek az óvodapedagógusok képzésében a közeli jövőben növelhetők legyenek. A fejlesztési és módszertani változások az informatikai lehetőségek és az egyéni hallgatói munkaidőben megvalósítható idegen nyelv-tanulás kölcsönhatásában keresendők. Ennek főleg az informatika oldaláról beruházási kritériumai is vannak, mert aránylag rövid idő alatt szükséges fejleszteni az informatikai eszközállományt ott, ahol ez eddig nem történt meg.

Létezik egy olyan út is, mely a reményteli jövőt vetíti elénk. Ez az út az óvodapedagógus képzés nemzetközivé tétele, a szaktárgyak idegen nyelven való oktatása. Azon intézményekben, ahol ezt a lehetőséget ki tudnák használni, lehetőség nyílna a magyar óvodapedagógusok képzésének nemzetközi, főiskolai szintű elismertetésére, propagálására. Természetesen egy ilyen terv megvalósítása nem megy máról holnapra, és ma még nyitott kérdés, milyen lenne az érdeklődés külföldről egy ilyen jellegű képzés iránt.

Az eddigiekben tárgyaltak elsősorban a nappali tagozatos képzést érintették. Létezik azonban egy olyan, az utóbbi években gyorsan fejlődött terület, mely ma már szintén egyre inkább összeforr az informatikával, az Internet-, e-mail-szolgáltatások nyújtotta lehetőségekkel. Ez az oktatási forma a távoktatás. A távoktatási forma a hagyományos felkészítésben gondolkodó nyelvtanárok számára legtöbbször idegen, mert itt a levelező képzéshez hasonlóan az oktató és a hallgató szóbeli kommunikatív kapcsolata nem a leggyakoribb. Ugyanakkor módszertani vonatkozásban, egy bizonyos szinten továbbgondolásra feltétlenül alkalmas. Gondoljunk csak a nem éppen olcsó „relaxációs” nyelvi kurzusokra. Az idegen nyelvi önképzés ezen formáját is fegyelembé kell venni a mai módszertani lehetőségek kialakításánál.

Az itt felsorolt különféle modellek természetesen együtt járnak azzal is, hogy az óvodapedagógusokat, szociálpedagógusokat oktató nyelvtanároknak is alkalmazkodniuk kell az új kihívásokhoz. A nyelv-tanároktól is elvárhatók az oktatáshoz szükséges számítógépes ismeretek, az audiovizuális eszközök kezelésének, a szakirodalomnak a naprakész ismerete, a módszertani sokrétűség, szükség esetén a szaknyelvi ismeretek és nem utolsósorban a nyelvoktatói kreativitás. Úgy tűnik, hogy a változásoknak nincsenek ellenzőik, de egy dologban mindenképpen konszenzust kell létrehozni, ez pedig az idegen nyelvek és az informatika elhelyezése óraszámában, súlyának megfelelően, a kreditrendszer folyamataiban. Az a gyakorlat, hogy a nyelvi lektorátusokat szükségesnek, de egyben feleslegesnek is tekintjük a felsőoktatási intézményekben, a jövőt tekintve a továbbiakban nem tartható. Ahol ezt nem veszik

figyelembe, nem szolgáltatnak informatikában és idegen nyelvben a megfelelő szinten, ott nem valószínű, hogy nőni fog a felvételiző hallgatók száma, főként ha van konkurens intézmény, mely jobban szolgálta.

Irodalom

Marton Károly (2000): *Változóban a főiskolai hallgatók szakmai identitástudata*. Pedagógus képzés.
Orbán Józsefné (2000): *Tanítók és tanárok felkészítése a kooperatív tanulásra, tanulásszervezésre*. Pedagógus képzés.

Lajos Tamás (1996): *Informatika a nyitott és távoktatásban*. (előadás)

158/1994. (XI.17) Korm. rendelet a tanító, a konduktor-tanító és az óvodapedagógus alapképzésben a képesítési követelményekről.

71/1998. (IV.8.) Korm. Rendelet az idegen nyelv-tudást igazoló államilag elismert nyelvvizsgáztatás rendjéről és a nyelvvizsga-bizonyítványokról.

Tárnok Péter

Bizonyítástípusok fejlődési modellje

Írásunk középpontjában bizonyítástípusok fejlődési modelljének leírása áll. A Harel és Sowder (1998) modelljében leírt öt bizonyítástípus (tekintélyelvű, rituális, szimbolikus, empirikus és deduktív) megítélését kérdőívvel vizsgáltuk matematikatanárok körében. Az eredmények azt mutatják, hogy a szimbolikus bizonyítások relatíve magasabb, míg az empirikus bizonyítások relatíve alacsonyabb értékeket kaptak. Az eredmények alapján – összevetve azokat a tanulói bizonyítás-megítélés vizsgálata során kapott eredményekkel – lehetővé vált a bizonyítástípusokat fejlődési aspektusból értelmező modell felállítása és annak alapján a pedagógiai konzekvenciák megfogalmazása.

A matematikában a bizonyítások tanítása alapvető fontosságú, mivel a bizonyítások a matematikai megértés és problémamegoldás fejlesztésének eszközei. (Hanna, 1995) Előbb-utóbb a tanulók többsége képessé válik matematikai és nem-matematikai témák esetén is deduktív bizonyításokat adni. Nem kellően világos azonban, hogy milyen lépéseken keresztül jutunk el a gyermekkori tekintélyre alapozott érveléstől az axiómákra

alapozott deduktív matematikai bizonyításokig. Fuson (1992) megjegyzi: „Egyes területeken kevésbé kidolgozottak a fejlődési szintek.” [mármint az összeadással és kivonással kapcsolatos fejlődési modellekhez képest – Cs. Cs.] Milyen fejlődési szintek azonosíthatók a bizonyítások tanítása során? És vajon a bizonyítandó állítás tartalma hogyan befolyásolja az érvelés jellegét? A tanulmányban egy matematikai alapú bizonyítás-kategorizálási rend-

szer bizonyítás-típusait elemezzük a gondolkodás fejlődésének aspektusából. Eredményeink szerint más tartalmi terület esetén is hasonló tendenciák figyelhetők meg. (Csikos, 2000)

E tanulmány az I. Országos Neveléstudományi Konferencia matematikadidaktikai szimpóziumán elhangzott előadás nyomán született. A problémakör teljes feldolgozása (Csikos, 2000) és egyes részterületek eredményeinek publikálása után (Csikos, 1999a, 1999b, 2001; Józsa és Csikos, 1999) most a legfőbb cél annak bemutatása, hogy a bizonyítástípusokra vonatkozó matematikatanári értékítélet hogyan befolyásolja a tanulók bizonyításokkal kapcsolatos gondolkodását. Először vázolóan a bizonyítások értékelésével kapcsolatos elméleti problémákat, kiemelve a fejlődés szempontjából kulcsfontosságú empirikus és szimbolikus bizonyításokat, majd a tanulmány második részében az empirikus vizsgálat sorozat egy részterületét mutatom be.

Matematikai szempontú bizonyítás-kategóriák

Amikor a tanulók bizonyításait értékeljük, nehéz feladatot kell megoldanunk. Vajon hogyan értékeljük az olyan bizonyítást, amelyben minden szerepel, ami tanári mintabizonyításban előfordult („kilóra megvan”), ám nem lehet tudni, hogy a tanuló mit tekint axiómának, és mit következménynek? A matematikadidaktika kutatóinak javaslatai közül kettőt említünk: Thompson és Senk (1993) holisztikus pontozási módszerét (részletesebben lásd Csikos, 1999a), valamint a hierarchikus bizonyítás-kategóriák használatát. Ez utóbbival kapcsolatos probléma, hogy a tételeknek több, egymástól jelentősen különböző bizonyítása lehet, amelyeket nem könnyű hierarchikus nehézségi sorrendbe helyezni. Hoyles (1997) egyenesen úgy fogalmaz, hogy bármiféle hierarchikus rendszer, amelyet a bizonyítási képesség értékelésére használunk, kutatómódszertani műtermék lehet.

A hierarchikus bizonyítási kategóriarendszerre remek példa Harel és Sowder

(1998) modellje, amely azzal a kiváló tulajdonsággal rendelkezik, hogy – szemben az említett Thompson és Senk-féle rendszerrel avagy Wilder (1944) klasszikus bizonyítás-típusaival – nem csupán deduktív bizonyításokat tartalmaz. Harel és Sowder modellje három hierarchikusan rendezett szintet foglal magába: externális (külső tekintélyre támaszkodó); empirikus; analitikus (deduktív) bizonyítások. Az externális szint három alszintre bontható: tekintélyelvű, rituális és szimbolikus bizonyításokra. Harel és Sowder modelljének legfőbb ereje, hogy nem a szaktudomány szerinti nehézség avagy értékesség a rendező szempontja, hanem „a kategóriák egy-egy kognitív szintet képviselnek ... a tanulók matematikai fejlődésében” (Harel és Sowder, 1998). Következésképpen az analitikus bizonyítások magasabb szintű képesség indikátorai, mint a többi bizonyítástípus. Az ötlet, hogy a matematikadidaktikának a bizonyítások egy olyan leírását kell megtalálnia, amelyben a matematika-tudomány és a pszichológia szempontjai egyaránt érvényesülnek, Balacheff (1988) gondolataira vezethető vissza.

A fejlődési modell szerkesztésének alapelvei

A bizonyítástípusokat magába foglaló fejlődési modellünk nem azt fogja leírni, hogy egy adott tanuló esetében milyen sorrendben alakulnak ki egyes bizonyítási sémák. Harel és Sowder (1998) szerint „az emberek egyszerre többféle bizonyítási sémával rendelkeznek”, vagyis egy konkrét személy bizonyítási képessége nem egyetlen szint megnevezésével jellemezhető. Ebből adódik, hogy a tanulók előrehaladása a bizonyítások tanulásában nem jellemezhető egymás után helyezett hierarchikus szintekkel. A bizonyítások tanulásának fejlődését evolúciós hasonlattal írhatjuk le. Ez azt jelenti, hogy a fejlődésben az egymással párhuzamosan létező különböző sémák közül egyeseket egyre gyakrabban használunk, míg mások használaton kívülre kerülhetnek. Ez az evolúciós fölfogás összhangban van az

evolúciós pszichológia fejlődéselméleteivel (Piatelli-Palmarini, 1989). Az értéke-sebbnek ítélt bizonyítások átveszik a terepet a kevésbé értékesnek tartott fajtáktól. A mi kultúrkörünkben a deduktív bizonyítá-sok számítanak legértékesebbnek, míg például a tekintélyelvű bizonyítások – a Boëthiusra hivatkozó Aquinói Szent Tamás szerint – nem férnek össze a tudomá-ny magasabbrendűségével. Ebből adó-dóan a számunkra ismerős tartalmi terüle-teken igyekszünk deduktív bizonyításokat adni, míg az ismeretlen területen meg-elégszünk a szakember véleményével vagy azzal, hogy egy példát hozunk az állít-ás igazolására.

Tanulmányunkban a már említett öt bi-zonyítástípus fejlődési modelljét vizsgáljuk. A fejlődést mint általános törvényszerűsé-get értelmezzük, vagyis úgy véljük, a leg-több tanuló és a legtöbb bizonyítandó állít-ás esetén hasonló lehet a fejlődés útja. Mindig lehetséges egyénenkénti vagy állít-ások szerinti anekdotikus különbségeket találni. Elképzelhető például, hogy valaki először megtanulja a Pitagorasz-tétel le-vezetését, majd rátalál a jól ismert 3–4–5 oldalhosszúságú derékszögű háromszögre, végül megelégszik azzal, hogy „a matektanárómtól hallottam”. Nem várható ugyan-akkor, hogy a többség számára, a legtöbb állítás esetén deduktív-empirikus-tekin-télyelvű legyen a fejlődési sor.

A fejlődési modell kulcsai: empirikus és szimbolikus bizonyítások

A fejlődés szempontjából a Harel és Sowder által leírt öt alaptípus közül kettő-nek kitüntetett szerepe van. Az újabb ku-tatások kimutatták az empirikus érvelés fontos szerepét a deduktív matematikai bizonyítások megértésében. A szimboli-kus bizonyítások fontos szerepéhez pedig éppen a jelen kutatás szolgál empirikus adatokkal.

A „régí” DTP-modellek és az újabb eredmények szembeállítás alapján (Csí-kos, 1999a) a kutatók hangsúlyozzák, hogy a matematika művelése során a ta-nulókat bátorítani kell arra, hogy ne ugor-

ják át az induktív, felfedező szakaszt (Hodgson és Morandi, 1996). Balacheff (1988) munkájában is fontos szerepet ját-szanak az empirikus sémák, amelyeket két fő típusba sorol: naiv empiricizmus és döntő kísérlet. „A naiv empiricizmus arra utal, hogy néhány konkrét eset megviz-ssgálása után döntünk az állítás igaz-ságáról.” (Balcheff, 1988) A döntő kísérlet ugyanakkor abban különbözik a naiv empiricizmustól, hogy a tanuló explicit módon foglalkozik az általánosíthatóság problémájával. Az empirikus bizonyítá-sok Harel és Sowder modelljében a kö-zépső szinten vannak, azaz az externális és a deduktív bizonyítások között.

A szimbolikus bizonyítások Harel és Sowder modelljében azzal jellemezhetők, hogy szimbolikus gondolkodásról árul-kodnak. A szimbolikus gondolkodás „szimbólumokról gondolkodás oly mó-don, mintha azoknak saját életük lenne, így elszakadva a szimbólumok lehetséges funkciójától, kvantitatív jelentésétől.” (Harel és Sowder, 1998) A szerzők szerint a túlzottan korai formalizmus vezethet oda, hogy a tanulók azt hiszik, a formai követelmények alapvetőek a matematikai bizonyításokban.

Kutatásunkban Harel és Sowder mo-delljének kiterjesztett értelmezését alkal-mazzuk. Ez annyit jelent, hogy nem-mate-matikai tartalmakra is ugyanazt az öt bizo-nyítási sémát alkalmaztuk, és ennek érde-kében a bizonyítási sémák leírását újrafog-almazzuk. Az öt alapvető bizonyítástípus legfőbb jellemzőit a következőképpen ra-gadhatjuk meg:

- tekintélyelvű: az érvelés egy szakértő vagy például egy tankönyv tekintélyére épül;
- rituális: rituális kijelentések használata (például „tegyük fel, hogy”) anélkül, hogy előrehaladnánk a tétel igazolásában;
- szimbolikus: értelem nélküli szimbó-lum-manipuláció, különböző változók ha-tástalan jelölése vagy elnevezése;
- empirikus: példák felsorolása, néhány eset megvizsgálása;
- deduktív: matematikai szempontból korrekt.

	válaszok száma	átlag	szórás
tekintélyelvű_háromszög	65	1,17	0,45
rituális_háromszög	65	1,18	0,53
szimbolikus_háromszög	64	1,22	0,60
empirikus_háromszög	65	1,38	0,52
tekintélyelvű_páratlan	65	1,40	0,75
rituális_páratlan	64	1,50	0,67
empirikus_páratlan	64	1,61	0,75
szimbolikus_páratlan	63	2,21	1,37
analitikus_páratlan	63	4,63	0,73
analitikus_háromszög	65	4,82	0,39

1. táblázat. Az öt vizsgált bizonyítástípus tanári megítélésének alapvető statisztikai mutatói

Hogyan értékeli matematikatanáraink a különböző bizonyítástípusokat?

Módszerek

Egy nagyobb vizsgálat részeként, amely célul tűzte ki a tanulók bizonyításokról alkotott képének megismerését (Csikos, 1999a, 1999b, 2000, 2001), kérdőívet készítettünk azon iskolák matematikatanárai számára, amelyek részt vettek a nagyminta-fölmérésben. A kérdőíveket 1999 májusában postáztuk, és közülük 65 érkezett vissza. Tanulmányunkban most a kérdőívnek azt a részét elemezzük, amely a tanároktól az öt – korábban már említett – bizonyítástípus megítélését kérte. A kérdőívnek ez a része két matematikai tételt és az azokhoz tartozó öt-öt különböző típusú bizonyítást tartalmazott. (Csikos, 2001) A két tétel a következő volt:

A háromszög belső szögeinek összege 180° .

Három páratlan szám szorzata mindig páratlan.

Valamennyi bizonyítástípus értékelése ötfokozatú Likert-típusú skálán történt. Tekintve, hogy az osztályozás is ötfokozatú, ez valójában egy egyszerű osztályozási procedúra volt tanáraink számára.

Eredmények és megbeszélés

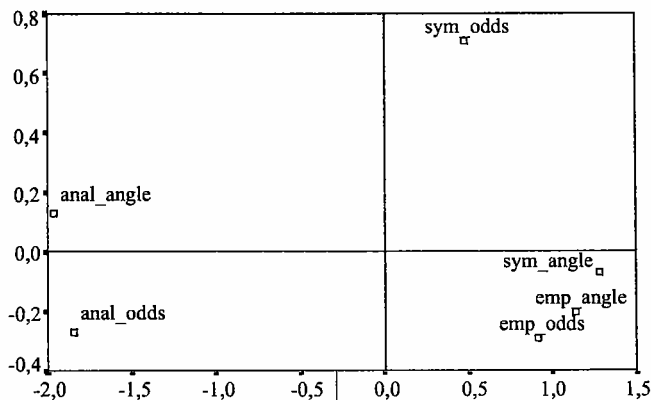
Az 1. táblázat a tanárok által adott pontszámok átlagát és szórását mutatja. A „háromszög” és a „páratlan” szavak utalnak a két vizsgált tételre.

Eredményeink szerint (és ez egyáltalán nem volt meglepő) matematikatanáraink a deduktív (analitikus) bizonyításokra adták

a legmagasabb pontszámokat. Általánosságban elmondható, hogy ebben a táblázatban a 0,19-ot elérő vagy azt meghaladó átlagbéli különbségek statisztikai szempontból jelentősek. Ebből adódóan a deduktív bizonyítások minden más típusnál magasabb átlagot kaptak, míg az empirikus és szimbolikus bizonyítások egyaránt magasabb átlagot kaptak, mint a tekintélyelvű érvelés. Az egyéb megfigyelhető különbségek tartalom-specifikusnak tekinthetők.

A „páratlan” tétel bizonyításai általában magasabb átlagokat kaptak, ami talán annak köszönhető, hogy a tanárok lágszívből a tanulók számára szokatlan bizonyítandó állítás megítélésében. Mindenesetre az átlagok és szórások különbözőségeinek elemzése semmitmondó abból a szempontból, hogy vajon mi volt a pontozás szempontrendszer. Elképzelhető ugyanis, hogy teljesen más szempont szerint tekinthető gyöngének egy empirikus és egy szimbolikus bizonyítás.

Az 1. ábra a többdimenziós skálázás segítségével vizuálisan észlelhetővé teszi, hogy a kapott nyers pontszámok mögött milyen hasonlóságok vagy különbségek fedezhetők fel az egyes típusok megítélésében. Az ábrán – a zsúfoltság elkerülése érdekében – a fejlődési aspektusból legfontosabb három típusal foglalkozunk. Az ábra elemzése azt mutatja, hogy a „páratlan” tétel szimbolikus bizonyításának megítélése élesen elüt az analitikus és empirikus bizonyításokétól, és hogy a kétféle empirikus bizonyítás megítélése nem csupán az átlagok leíró statisztikai szintjén, hanem a vé-



1. ábra. Három bizonyítástípus euklideszi távolságmodellje a többdimenziós skálázás alapján (stress=0,01) [anal=analitikus, emp=empirikus, sym=szimbolikus, odds='páratlan', angle='háromszög']

leménykülönbségek struktúrájára épülő többdimenziós skálázás szerint is hasonló. A második észrevétel azért is érdekes, mert az egyik empirikus bizonyítás a naiv empiricizmus, míg a másik a döntő kísérlet Balacheff-i típusát képviselte.

A többdimenziós skálázással nyert euklideszi távolságmodellel lehetővé válik, hogy azonosítsuk a tanári értékítélet mélyén fellelhető tényezőket. Ehhez az szükséges, hogy a kapott ábrán a tengelyeknek (dimenzióknak) megfelelő interpretációt adjunk. Az első dimenzió (a vízszintes tengely) a leíró statisztikai táblázatban tapasztalt átlagértékek fordított skálájának tekinthető. A második dimenzió (a függőleges tengely) a bizonyítások formalizáltságaként értelmezhető. A leginkább formalizáltak a „páratlan tétel” szimbolikus bizonyítása tekinthető, ugyanakkor az ehhez az állításhoz tartozó empirikus és analitikus bizonyítások nem tartalmaznak absztrakt matematikai jeleket. A többdimenziós skálázás tehát felszínre hozott a leíró statisztikával is kimutatható értékeségi viszonyulás mellett egy másik tényezőt, amely a bizonyítások megítélését befolyásolja: a formalizáltság mértékét.

Amint azt matematikai tévképzetekkel kapcsolatban *Zaslavsky* (1989) kimutatta, a tanulók hibás fogalmi visszavezethetők tanáraikéra, így nagy valószínűséggel a bizonyítások megítélésével kapcsolatos tanulói értékítéletet döntően meghatározza a mate-

matikatanaré. Egy kismintás mérésben empirikus adatokkal támasztottuk alá azt a plauzibilis feltételezést (*Csikos*, 2000), hogy amikor tanulók bizonyításokat értékelnek, lényegében ugyanazt a pontszámot adják, mint amit szerintük a tanáruk adna. Ugyancsak kimutattuk, hogy az iskolai évek alatt változás következik be a tanulói bizonyítás-megítélésben. Például míg 7. osztályban ötfokú skálán a tekintélyelvű érvelésre adott átlag 1,96 és 2,82 között változik – a bizonyítandó állítás tartalmától függően, addig a 11. évfolyamos gimnazisták átlaga mindegyik esetben 1,6 alatti.

Vizsgálatunkkal közelebb juthatunk annak a hatásrendszernek a megismeréséhez, amely a tanulók szemében a bizonyítások értékességét meghatározza;

- feltételezhetjük, hogy a bizonyításokkal kapcsolatos gondolkodási folyamatok evolúciós hasonlaltal írhatók le; a hatékonynak tartott sémák megerősítést nyernek, míg más sémák háttérbe szorulnak;

- nyilvánvaló, hogy amennyiben választási lehetőségünk van több séma között, akkor valamilyen értékelési folyamatnak kell lejátszódnia a gondolkodásban;

- kimutatható, hogy a tanulók lényegében úgy ítélik meg a bizonyítási sémákat, mint ahogyan véleményük szerint matematikatanáruk azokat megítéli;

- az iskolai évek alatt a bizonyítások tanulói megítélése változik, és egyre inkább a tanárokéhoz hasonlóvá válik.